# Filtri analogici

1915 Primi filtri elettrici per ripetitori

↓ Tutte le applicazioni di trattamento e trasmissione dei segnali

Un filtro è un calcolatore analogico

- componenti poco precisi, soggetti a variazioni di temperatura ed all'invecchiamento
- tecnologia semplice
- realizzazione poco costosa
- dispositivo affidabile

Un filtro elettrico è un dispositivo progettato per

•separare

•far passare

•o sopprimere

un gruppo di segnali da diversi segnali che utilizzano lo stesso canale di trasmissione.

E' difficile trovare un sistema elettronico che non impieghi un filtro.

Esempi

❖Eliminare ciò che contamina il segnale (rumore nei sistemi di comunicazione)

❖Separare componenti in frequenza rilevanti da quelle irrilevanti

❖Demodulare segnali

❖Limitare i segnali in banda prima del campionamento

❖Convertire i segnali campionati in continui

❖Migliorare la qualità di segnali audio (altoparlanti)

❖Sintesi del parlato

❖Equalizzazione di cavi e linee di trasmissione

❖Su larga scala televisione e radio

❖Su scala più piccola i componenti elettronici base usati nei telefoni, nella televisione, nella radio, nei radar e nei computer.

Filtri attivi (resistori, capacitori ed **elementi attivi**)

- economici (avanzamento della tecnologia dei circuiti integrati)
- produzione di serie
- pesano poco e occupano poco spazio
- larghezza di banda finita (<30kHz)

Filtri passivi (resistori, capacitori ed induttori)

- problemi di costi e ingombri
- minore sensibilità rispetto ai filtri attivi
- larghezza di banda fino a 500kHz

Poiché $Z_L = \omega L$, valori elevati di reattanza richiedono alle basse frequenze valori elevati di induttanza.

Ex. L=1mH

f=1 MHz → $Z_L$=6.28 kΩ

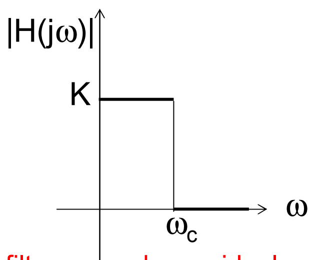
f=100 Hz → $Z_L$=0.628 Ω

Elevato numero di spire della bobina → aumento della R, della dimensione e del costo dell'induttore

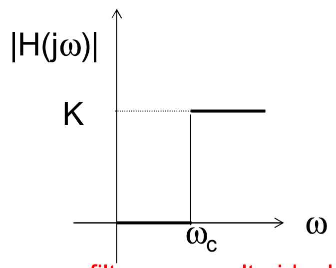
Materiali ferromagnetici con elevata $\mu$

Gli induttori sono generalmente incompatibili con la miniaturizzazione

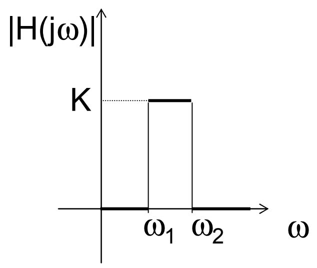
**Filtri attivi**



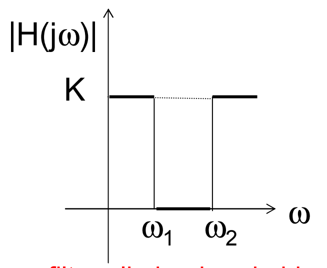

filtro passa-basso ideale




filtro passa-alto ideale




filtro passa-banda ideale




filtro elimina-banda ideale

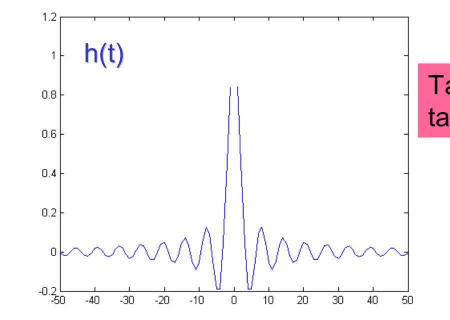
Il filtro passa basso ideale ha $H(j\omega) = \begin{cases} 1 \text{ per } |\omega| \le \omega_C \\ 0 \text{ altrove} \end{cases}$.

La corrispondente risposta impulsiva è

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_C}^{\omega_C} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j t}\left(e^{j\omega t}\right)_{-\omega_C}^{\omega_C} = \frac{\text{sen}(\omega_C t)}{\pi t} \neq 0 \text{ per } t < 0$$

Il filtro ideale è quindi NON CAUSALE

La risposta dovrebbe esistere prima dell'applicazione dell'impulso




Tanto più alto è l'**ordine** del filtro reale, tanto più si avvicina al filtro ideale

## Procedura di sintesi di una data rete

1. **Approssimazione**

   Generare una **funzione di trasferimento** che soddisfi certe specifiche (ampiezza o fase etc.,).

   **<u>Metodi in forma chiusa</u>**: il problema è risolto attraverso un certo numero di passi utilizzando formule e trasformazioni in forma chiusa (Butterworth, Chebyschev, etc).
   - Soluzioni molto precise
   - Pochi calcoli
   - Adatti per caratteristiche con distorsione in ampiezza costante a tratti, all'interno di certe tolleranze.

   **<u>Metodi iterativi</u>**: a partire da una soluzione iniziale attraverso un metodo di ottimizzazione si ottengono una serie di soluzioni migliori finché un certo criterio non è soddisfatto.
   - Molti calcoli
   - Adatti per caratteristiche arbitrarie

2. **Realizzazione**

   Conversione delle caratteristiche del filtro nella corrispondente rete elettrica (ne esiste generalmente più di una).

3. **Studio delle imperfezioni**

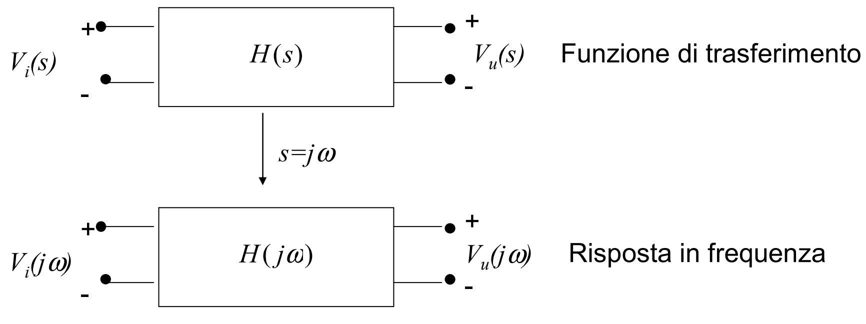
   Al passo 1. i coefficienti della funzione di trasferimento sono determinati con elevata precisione; la realizzazione al punto 2. è ottenuta assumendo gli elementi ideali (C senza perdite, L senza C parassite, amplificatori con larghezza di banda infinita, etc.)

   Occorre studiare l'effetto delle imperfezioni (tolleranze, non linearità, etc.) mediante analisi di tolleranza, analisi di sensibilità, analisi del rumore, etc..

2. **Implementazione**

## Risposta in frequenza

Caratterizza la risposta a regime sinusoidale




$$H(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$\begin{cases} M(\omega) & \text{Risposta in ampiezza} \\ \phi(\omega) & \text{Risposta in fase} \end{cases}$$

Un filtro distorce il segnale in ingresso:

**Distorsione d'ampiezza**
Risposta in ampiezza non costante → componenti in frequenza diverse del segnale amplificate diversamente.

**Distorsione di fase**
Risposta in fase non lineare → componenti in frequenza diverse del segnale ritardate diversamente.

Esempio

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t) + X_a \cos(2\pi f_a t) + X_b \cos(2\pi f_b t)$$

$$f_0 > f_b > f_a$$

$$\hat{x}(t) = X_a \cos(2\pi f_a t) + X_b \cos(2\pi f_b t)$$ segnale desiderato

→Filtro passa basso con risposta in frequenza

$$A(2\pi f) = \begin{cases} 1 & 1 < f < f_C \\ 0 & f_C < f \end{cases}$$ risposta in ampiezza

$$f_a < f_b < f_c < f_0$$

$$\phi(2\pi f)$$ risposta in fase

L'uscita accettabile è $u_a(t) = k\hat{x}(t-\tau)$

ritardo

attenuazione

Esempio

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t) + X_a \cos(2\pi f_a t) + X_b \cos(2\pi f_b t)$$

$f_0 > f_b > f_a$

$$\hat{x}(t) = X_a \cos(2\pi f_a t) + X_b \cos(2\pi f_b t)$$ segnale desiderato

→Filtro passa basso con risposta in frequenza

$$A(2\pi f) = \begin{cases} 1 & 1 < f < f_C \\ 0 & f_C < f \end{cases}$$ risposta in ampiezza

$f_a < f_b < f_c < f_0$

$$\phi(2\pi f)$$ risposta in fase

L'uscita accettabile è $u_a(t) = k\hat{x}(t-\tau)$

ritardo

attenuazione

L'uscita del filtro è

$$u(t) = X_a \cos(2\pi f_a t + \phi(2\pi f_a)) + X_b \cos(2\pi f_b t + \phi(2\pi f_b))$$

Si ha $u(t) = u_a(t)$ se la <u>risposta in fase è lineare</u>

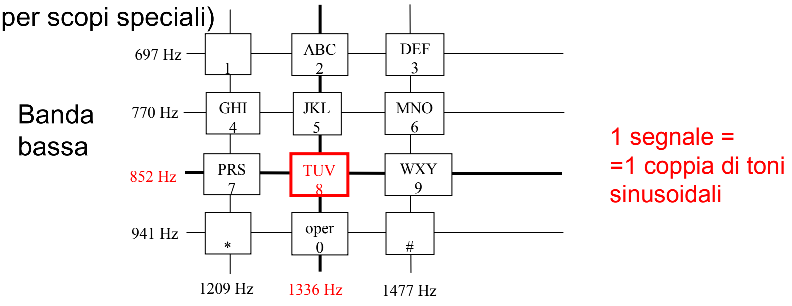
$$\phi(2\pi f) = -2\pi f \tau \quad \rightarrow \begin{cases} \phi(2\pi f_a) = -2\pi f_a \tau \\ \phi(2\pi f_b) = -2\pi f_b \tau \end{cases}$$

Infatti, in tal caso

$$u(t) = X_a \cos(2\pi f_a (t-\tau)) + X_b \cos(2\pi f_b (t-\tau))$$

## Esempio 1

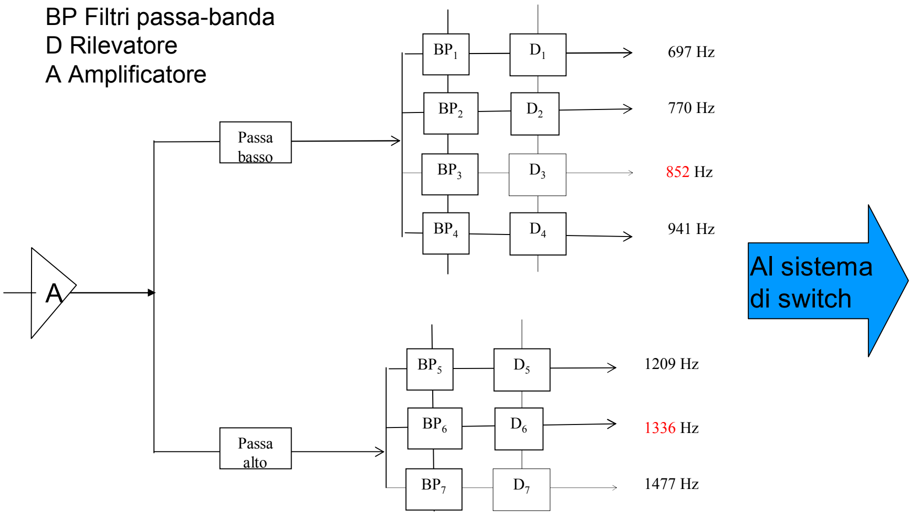
Individuazione di segnali generati da un telefono in multifrequenza (devono essere individuati i 10 digit decimali da 0 a 9 e 2 bottoni * e # usati per scopi speciali)




Quando viene composto un n. di telefono viene trasmesso un insieme di segnali, che vengono convertiti in segnali in continua usati da un sistema di switch che connette il chiamante al chiamato.

Come si individuano i numeri da chiamare?

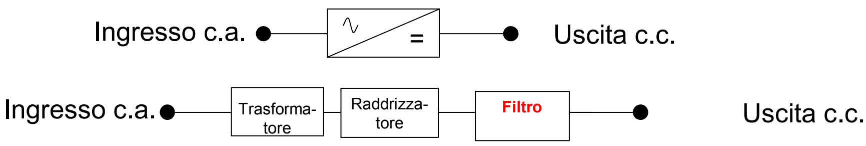
BP Filtri passa-banda
D Rilevatore
A Amplificatore




Ogni filtro passa-banda passa un solo tono ed è seguito da un rivelatore D che, si attiva quando la sua tensione supera un determinato livello e fornisce il segnale di switch in continua per connettere l'utente al numero chiamato.

## Esempio 2

Un convertitore ac/dc consente di realizzare un alimentatore in continua partendo da una rete di alimentazione in corrente alternata




Il <u>trasformatore</u> isola galvanicamente l'uscita in continua dall'ingresso in alternata ed adatta la tensione di rete alla tensione di uscita richiesta.

Il <u>raddrizzatore</u> è un componente non lineare che converte l'energia da alternata a unidirezionale.

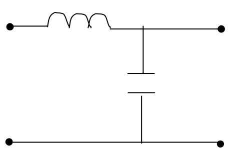
Il **<u>filtro</u>** assolve la funzione di far passare solo la componente continua dello spettro prodotto dal raddrizzatore e di bloccare tutte le altre righe dello spettro (armoniche)

---

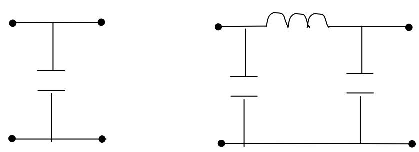
La tensione (corrente) all'uscita del raddrizzatore non è rigorosamente continua ma possiede un certo residuo (ripple)

$$\text{Ripple\%} = \frac{V_{eff}^{carico}}{V_{medio}^{carico}} \longrightarrow \text{(componente continua)}$$

Per far passare la componente continua si utilizza un filtro passa-basso



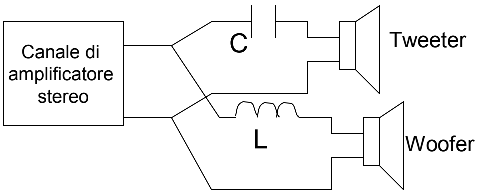
<u>Filtro LC ad ingresso induttivo</u>

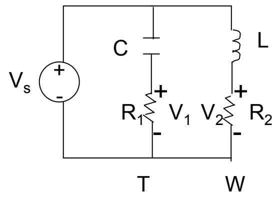


<u>Filtri ad ingresso capacitivo</u>

## Esempio 3

Il circuito crossover accoppia un amplificatore audio a degli altoparlanti di tipo woofer o tweeter

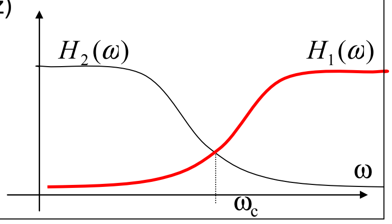



Un woofer è un altoparlante progettato per riprodurre accuratamente la parte bassa dell'intervallo delle frequenze audio (<3 kHz)
Un tweeter è un altoparlante progettato per riprodurre accuratamente la parte alta dell'intervallo delle frequenze audio (3-20 kHz)

$$H_1(\omega) = \frac{V_1}{V_s} = \frac{j\omega R_1 C}{1 + j\omega R_1 C} \quad \text{passa alto}$$

$$H_2(\omega) = \frac{V_2}{V_s} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} \quad \text{passa basso}$$



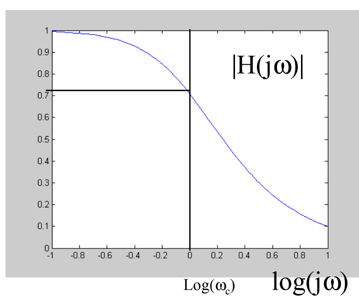

## Filtri passa basso

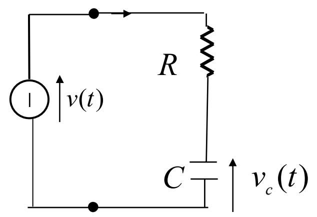
•La funzione di rete di un passa basso del 1° ordine

$$H(j\omega) = k\frac{\omega_0}{j\omega + \omega_0}$$

$\omega_0$ = pulsazione di taglio
$k$ guadagno

$$|H(\omega)| = \frac{k\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \cong \begin{cases} 0 & \omega >> \omega_0 \\ k & \omega << \omega_0 \\ \dfrac{k}{\sqrt{2}} & \omega = \omega_0 \end{cases}$$

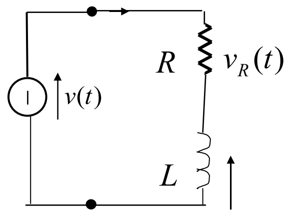


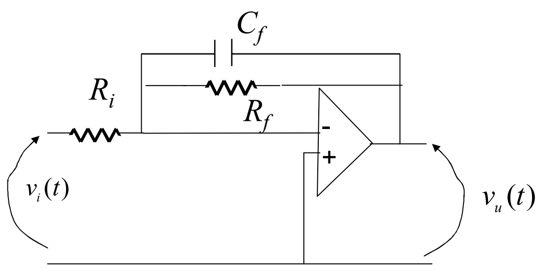



$$H(j\omega)=\frac{\dot V_c}{\dot V}=\frac{1/(j\omega C)}{R+1/(j\omega C)}=\frac{1/RC}{j\omega+1/RC}$$

$\omega_0 = 1/RC$

$k = 1$




$$H(j\omega)=-\frac{Z_f}{Z_i}=-\frac{1}{R_i}\frac{R_f\frac{1}{j\omega C_f}}{R_f+\frac{1}{j\omega C_f}}=\frac{-\,1/R_iC_f}{j\omega+\frac{1}{R_fC_f}}$$

$\omega_0=\frac{1}{R_fC_f}$ non dipende da $R_i$ (se sommo diversi ingressi con diverse $R_i$, $\omega_0$ rimane la stessa per tutti gli ingressi)

$k\omega_0=-\,1/R_iC_f \rightarrow \quad k= R_f/R_i \quad >=< 1$

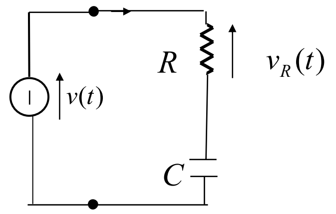
## Filtri passa alto

•La funzione di rete di un passa alto del 1° ordine

$$H(j\omega) = k\frac{j\omega}{j\omega + \omega_0}$$

$\omega_0$ = pulsazione di taglio
$k$ guadagno in continua

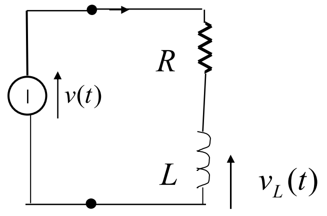
$$|H(\omega)| = \frac{k\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \cong \begin{cases} 0 & \omega << \omega_0 \\ k & \omega >> \omega_0 \\ \frac{k}{\sqrt{2}} & \omega = \omega_0 \end{cases}$$

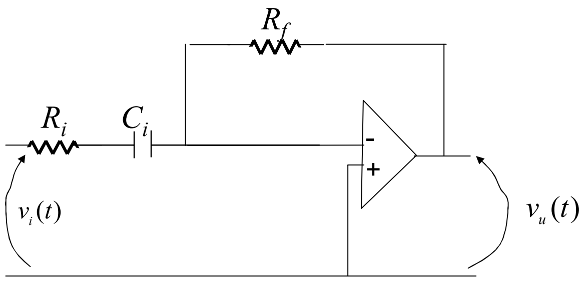



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_R}{\dot{V}} = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC}$$

$\omega_0 = 1/RC$

$k = 1$






$$H(j\omega) = -\frac{Z_f}{Z_i} = -\frac{\frac{1}{j\omega C_f}}{R_i + \frac{1}{j\omega C_i}} = -\frac{j\omega\, {}^{R_f}\!/_{R_i}}{j\omega + \frac{1}{R_i C_i}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R_i C_i}$$

$$k = {}^{R_f}\!/_{R_i}$$

## Filtri passa banda

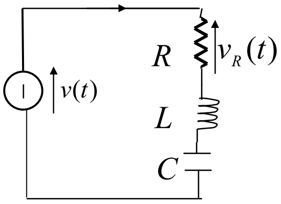
FiLtri del II ordine
•Approssimazione poco costosa dei filtri ideali
•Blocco elementare  per costruire filtri più complessi di tutti i tipi
•Ordine minimo per realizzare passa e oscura banda

La risposta in frequenza

$$H(j\omega) = k\frac{j\omega\frac{\omega_0}{Q}}{-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2}$$

$k$ guadagno
$\omega_0$ pulsazione di centrobanda
$Q$ fattore di qualità
$\omega_1$ pulsazione di taglio inferiore
$\omega_2$ pulsazione di taglio superiore

$$|H(\omega)| = k\frac{\omega\frac{\omega_0}{Q}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}} \cong \begin{cases} 0 & \omega >> \omega_0 \\ k & \omega = \omega_0 \\ 0 & \omega << \omega_0 \\ k/\sqrt{2} & \omega = \omega_{1,}\omega_2 \end{cases}$$

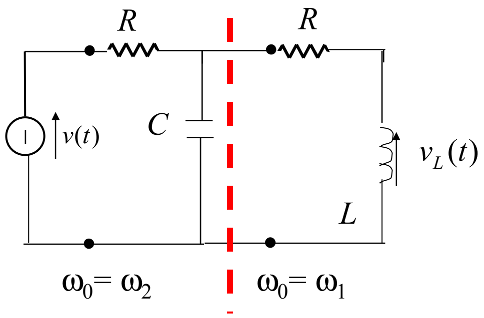



$$H(j\omega)=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)}=\frac{j\omega R/L}{-\omega^2+j\omega R/L+1/LC}$$

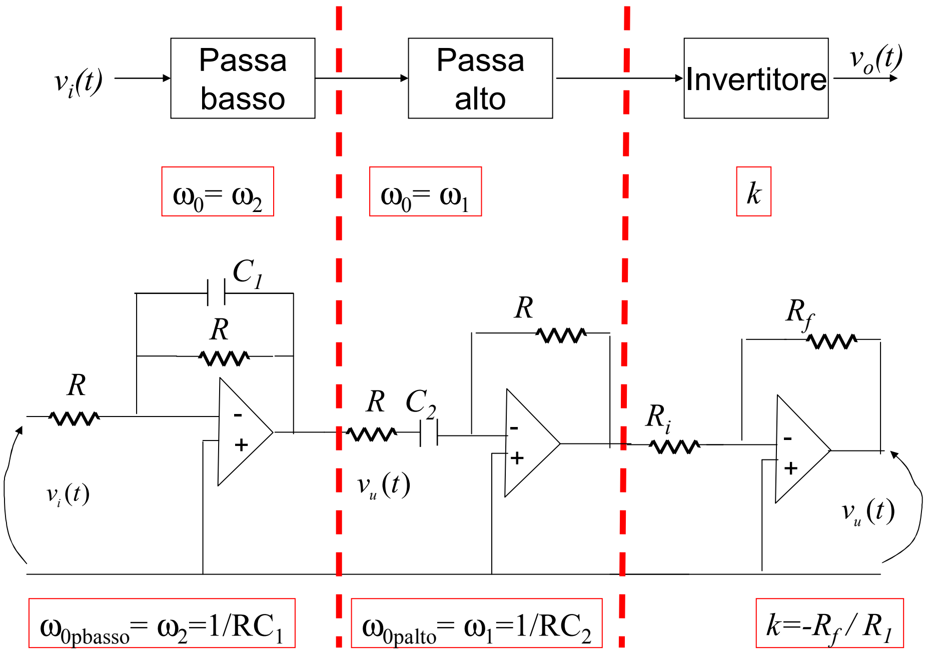
$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$k=1$$

$$\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L}\rightarrow Q=\frac{\omega_0 L}{R}$$




Cascata di passa basso e passa alto



$$H(j\omega)=\prod H_i=\left(-\frac{\frac{1}{RC_1}}{j\omega+\frac{1}{RC_1}}\right)\left(-\frac{j\omega\frac{R}{R}}{j\omega+\frac{1}{RC_2}}\right)\left(-\frac{R_f}{R_i}\right)=$$

(Vedi slide successiva)

$$=-\frac{R_f}{R_i}\frac{\frac{j\omega}{RC_1}}{-\omega^2+j\omega\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}+\frac{1}{R^2C_1C_2}}$$

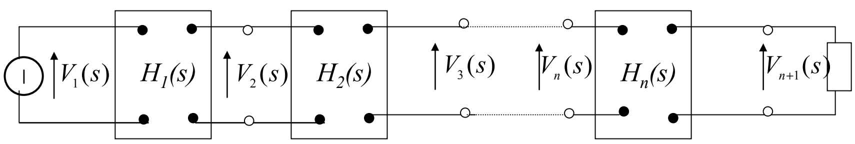
$$\omega_0=\frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$$

$$\omega_1=\frac{1}{RC_2};\quad \omega_2=\frac{1}{RC_1}$$

$$|H(\omega_0)|=k=\frac{R_f}{R_i}\frac{C_2}{C_1+C_2}$$

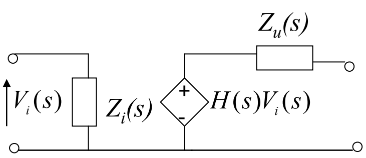
## Filtri di ordine elevato

Spesso realizzati come cascata di filtri del II ordine

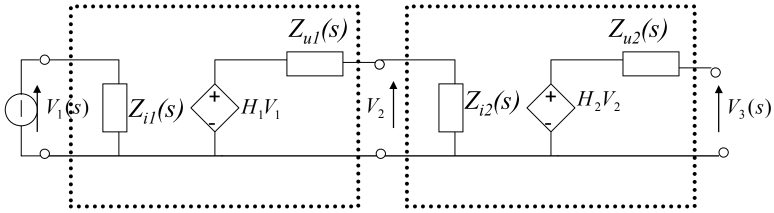



Cascata di $n$ stadi del II ordine

Molto spesso il comportamento di uno stadio cambia quando viene connesso ad un altro stadio (caricamento)




Modello circuitale di uno stadio adatto all'analisi del caricamento




$V_3 = H_2V_2$

$V_2 = \frac{Z_{i2}}{Z_{u1}+Z_{i2}} H_1V_1$ Con il 2° stadio

$V_2 = H_1V_1$ Senza il 2° stadio

Il 2° stadio carica il 1°. Ciò si può eliminare rendendo infinita la $Z_{i2}$ o nulla la $Z_{u1}$

$$V_3 = H_2V_2 = H_2 \frac{Z_{i2}}{Z_{u1}+Z_{i2}} H_1V_1$$

$$H = \frac{V_3}{V_1} = H_2 \frac{Z_{i2}}{Z_{u1}+Z_{i2}} H_1$$

Se $Z_{u1} = 0$ o se $Z_{i2} = \infty$,
$H = H_2H_1$

I filtri di Sallen Key hanno $Z_u=0$, pertanto possono essere collegati in cascata senza caricare l'uscita.

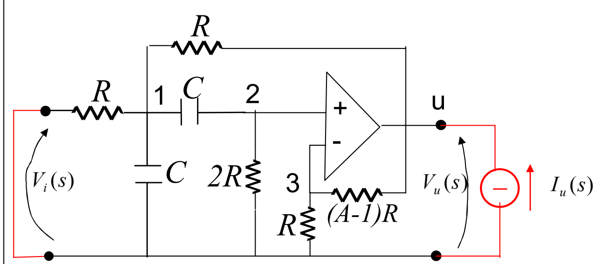
$$H = \prod_i H_i$$

I filtri RLC hanno $Z_u \neq 0$, e $Z_i \neq \infty$

$$H \neq \prod_i H_i$$

Esempio

Sallen Key Passa Banda – Calcolo della $Z_u$

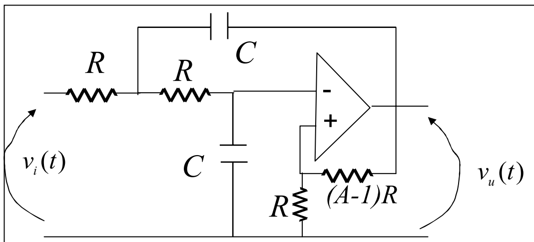



$$Z_u = \frac{V_u}{I_u}$$

$$\begin{cases} \dfrac{V_1}{R} + \dfrac{V_1}{1/sC} + \dfrac{V_1 - V_u}{R} + \dfrac{V_1 - V_2}{1/sC} = 0 \\ \dfrac{V_2 - V_1}{1/sC} + \dfrac{V_2}{2R} = 0 \\ \dfrac{V_2}{R} + \dfrac{V_2 - V_u}{(A-1)R} = 0 \qquad (V_3 = V_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $V_u = 0 \rightarrow Z_u = 0$

Filtro di Sallen Key

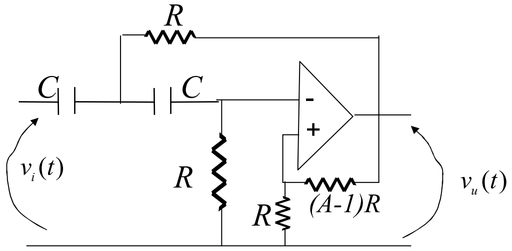



PB

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{3-A}$$

$$k = A$$




PA

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{3-A}$$

$$k = A$$