Sintesi di circuiti
Immettenze RC

Introduzione
Condizioni di realizzabilità
Proprietà
Sintesi di Foster I
Sintesi di Foster II
Sintesi di Cauer I
Sintesi di Cauer II

Introduzione alle immettenze RC

Per queste immettenze, *secondo quanto gia' visto*, avremo una formulazione del tipo :

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{|I|^2}\left[F_\circ(s) + \frac{V_\circ(s)}{s}\right]$$

$$Y_{RC}(s) = \frac{1}{|V|^2}\left[F_\circ(s) + \frac{V_\circ(s)}{s^*}\right]$$

$F_\circ, V_\circ \geq 0$
$F_\circ, V_\circ \in \mathbb{R}$

Zeri di impedenze RC

$$Z_{RC}(s_\circ) = 0 \rightarrow F_\circ(s) + \frac{V_\circ(s)}{s} = 0 \rightarrow s_\circ = -\frac{V_\circ(s_\circ)}{F_\circ(s_\circ)}$$

Da cui si desumono le proprieta' :

$$S_0 \leqslant 0$$
$$S_0 \in \mathbb{R}$$

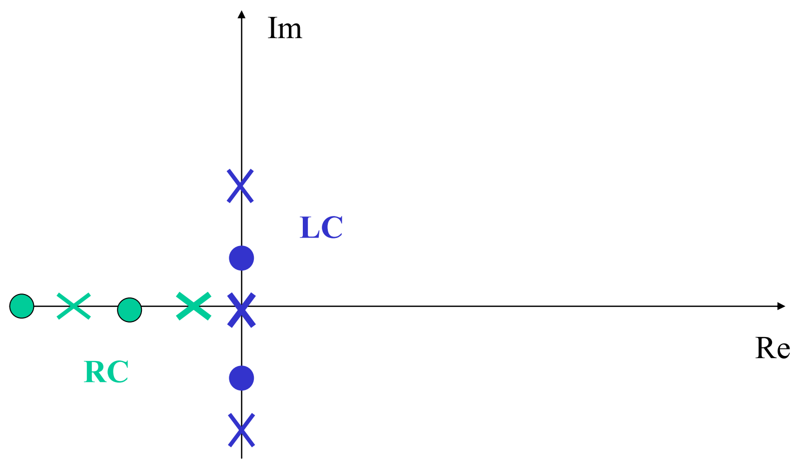
Zeri di ammettenze RC

Con ragionamenti analoghi ai precedenti, si ottiene :

$$S_0 \leqslant 0$$
$$S_0 \in \mathbb{R}$$

Conclusione

Zeri e poli di ammettenze RC sono reali, minori o uguali a zero



Proprietà

$S =$
- 0
  - Le resistenze restano tali
  - I condensatori diventano aperti
    - $Z = \frac{1}{sC} \longrightarrow$ Polo
    - $Y = sC \longrightarrow$ Zero
- ∞
  - Le resistenze restano tali
  - I condensatori diventano corti
    - $Z = \frac{1}{sC} \longrightarrow$ Zero
    - $Y = sC \longrightarrow$ Polo

Quindi dallo schema di pagina precedente di ricava:

$S =$
- 0
  - Z_{RC}
    - Cost. reale >0
    - Polo
  - Y_{RC}
    - Cost. reale >0
    - Zero
- ∞
  - Z_{RC}
    - Cost. reale >0
    - Zero
  - Y_{RC}
    - Cost. reale >0
    - Polo

Condizioni di realizzabilita'

Ipotesi : zeri e poli devono essere semplici

Come gia' per le *immettenze LC*, abbiamo gruppi di condizioni equivalenti, con la differenza che in questo caso, pero', le condizioni di realizzabilita' per le impedenze e per le ammettenze sono leggermente differenti, come sara' evidenziato piu' avanti.

Primo gruppo di condizioni di realizzabilita' per impedenze RC

1- Z_{RC} e' funzione razionale reale

2- I poli di Z devono essere reali, minori o uguali a zero, semplici, e con residuo reale **maggiore o uguale a zero.**

3 - $\lim_{s \to \infty} Z(s) = K_{\infty}$ Reale, maggiore o uguale a zero

Secondo gruppo di condizioni di realizzabilita' per impedenze RC

1 - Z e' funzione razionale reale

2 - Poli e zeri di Z devono essere reali, minori o uguali a zero, semplici e alternati

3 - La frequenza critica piu' vicina a s=0 deve essere un polo, quella piu' lontana uno zero

4 - Il livello deve essere > 0

Naturalmente, il primo ed il secondo gruppo di condizioni sono perfettamente equivalenti.

Primo gruppo di condizioni di realizzabilita' per ammettenze RC

1- Y_{RC} e' funzione razionale reale

2- I poli di Y devono essere reali, minori o uguali a zero, semplici, e con residuo di Y(s) / s reale positivo

Secondo gruppo di condizioni di realizzabilita' per ammettenze RC

1 - Y e' funzione razionale reale

2 - Poli e zeri di Y devono essere reali, minori o uguali a zero, semplici e alternati

3 - La frequenza critica piu' vicina a s=0 deve essere uno zero, quella piu' lontana un polo

4 - Il livello deve essere > 0

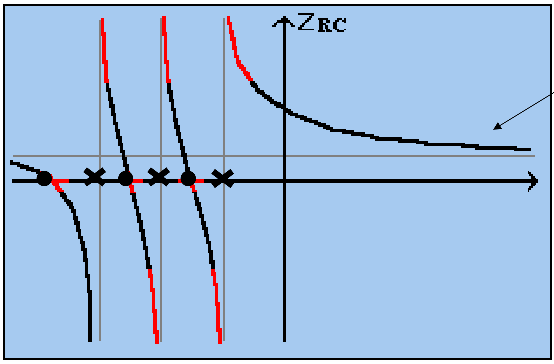
E come prima, le due serie di condizioni sono perfettamente equivalenti.

$$Z_{RC}(s) = K_\infty + \frac{K_0}{s} + \sum_i \frac{K_i}{s+\sigma_i}, \quad \sigma_i \in R^+,\ K_i, K_0 \in R^+ \bigcup 0$$

Studiamo ora la derivata dell'espressione di Z_{RC} di *Foster I*

$$\frac{d\,Z_{RC}}{d\,s} = -\frac{K_0}{s^2} + \sum_i -\frac{K_i}{(s+\sigma_i)^2} < 0$$

dalla quale formula si ricava il seguente grafico



I gruppo
Condiz. 3

Naturalmente, derivando l'espressione di Y_{RC} si otterrebbe un grafico duale al precedente.

Si è dimostrato che

Poli e zeri sono reali negativi e alternati

La frequenza critica più vicina a zero deve essere un polo.
e la più lontana uno zero

$$\lim_{s\to\pm\infty} Z_{RC} = \begin{cases} 0 \\ R \end{cases}$$

$$\lim_{s\to 0} Z_{RC} = \begin{cases} \infty \\ R \end{cases}$$

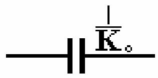
Sintesi di Foster I

Scomponendo Z_{RC} in fratti semplici, si ottiene la seguente espressione :

$$Z_{RC}(s) = \frac{K_o}{s} + K_{\infty} + \sum_i \frac{K_i}{(s+\sigma_i)}$$

che si traduce cosi' in termini circuitali

$$\frac{K_o}{s} \longrightarrow$$

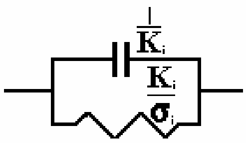


Elemento serie

$$K_{\infty} \longrightarrow$$

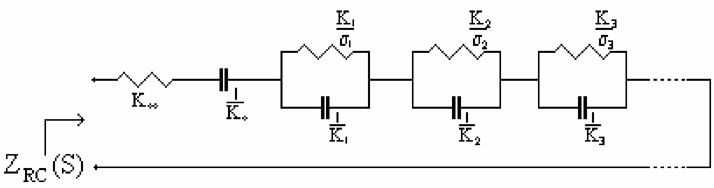
Elemento serie

$$\frac{K_i}{s+\sigma_i} \longrightarrow$$



Elemento serie

Ottenendo cosi' il seguente risultato



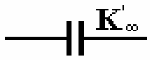
Sintesi di Foster II

Scomponendo Y_{RC} in fratti semplici in maniera simile a come fatto per la sintesi di *Foster I*, si ottiene :

$$Y_{RC}(s) = K'_o + K'_\infty s + \sum_i \frac{s\,K'_i}{(s+\sigma'_i)}$$

che si traduce cosi' in termini circuitali

$K'_\infty\, s \longrightarrow$

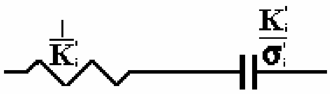


Elemento parallelo

$K'_o \longrightarrow$

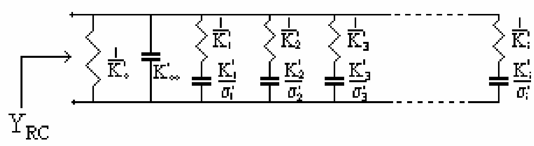
Elemento parallelo

$\dfrac{s\,K'_i}{s+\sigma'_i} \longrightarrow$



Elemento parallelo

Ottenendo cosi' il seguente risultato



Sintesi di Cauer I

$$Z_{RC}(\infty)\begin{cases}\text{Cost. reale} > 0\\ \text{Zero}\end{cases} \qquad Y_{RC}(\infty)\begin{cases}\text{Cost. reale} > 0\\ \text{Polo}\end{cases}$$

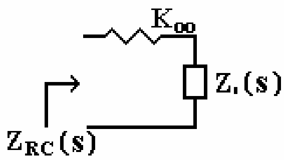
Come si nota dal grafico di Z(s) e di Y(s)

La sintesi di Cauer I consiste nella rimozione alternata di poli all'infinito da Y(s) e di costanti all'infinito da Z(s)(dalle *condizioni di realizzabilità*).

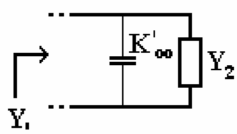
$$Z_{RC}(s) = K_\infty + \underbrace{\frac{K_0}{s} + \sum_i \frac{K_i}{(s+\sigma_i)}}_{Z_1}$$

$$Z_{RC}(s) = K_\infty + Z_1(s) \quad \Rightarrow \quad \lim_{s\to\infty} Z_1(s) = 0$$

$$Z_{RC}(s) = K_\infty + Z_1(s) \quad \Rightarrow$$



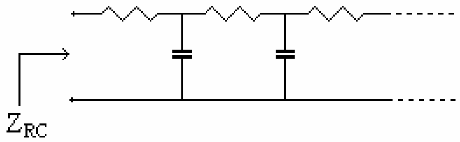
$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polo all'infinito}}}{s K'_\infty} + Y_2 \quad \Rightarrow$$



$$Z_2 = \frac{1}{Y_2}$$

E si va avanti in questo modo iterativamente.

Alla fine della sintesi, si ottiene una rete a scala del tipo



in cui la Z_{RC} si può esprimere come:

$$Z_{RC}(s) = R_1 + \cfrac{1}{sC_2 + \cfrac{1}{R_3 + \cfrac{1}{sC_4 + \cdots\cdots}}}$$

Esiste un modo più "automatico" rispetto a quello visto *precedentemente* per calcolare i coefficienti degli elementi della rete, come si può vedere alla prossima pagina.

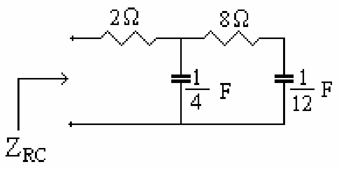
La divisione lunga, che è già stata analizzata parlando delle *impedenze LC*, come si può vedere dal prossimo esempio di sintesi.

Esempio di sintesi

$$Z(S) = \frac{2S^2+8S+6}{S^2+2S}$$

$$S^2+2S \,)\, 2S^2+8S+6 \,)\, 2 \leftarrow R_1$$
$$-2S^2-4S$$
$$//\quad 4S+6 \,)\, S^2+2S \,)\, \frac{S}{4} \leftarrow SC_2$$
$$-S^2-\frac{3}{2}S$$
$$//\quad \frac{1}{2}S \,)\, 4S+6 \,)\, 8 \leftarrow R_3$$
$$-4S$$
$$//\quad 6 \,)\, \frac{1}{2}S \,)\, \frac{1}{12}S \leftarrow SC_4$$
$$-\frac{1}{2}S$$
$$//$$

Dalla quale sintesi si perviene al circuito seguente



Sintesi di Cauer II

$Z_{RC}(0)$ < Cost. reale >0 / Polo

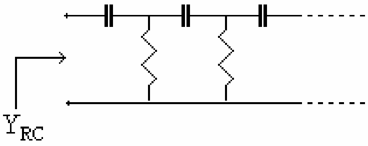
$Y_{RC}(0)$ < Cost. reale >0 / Zero

La sintesi di Cauer II consiste nella rimozione alternata di poli in zero da Z(s) e di costanti in zero da Y(s)(dalle *condizioni di realizzabilità*).

$$Y_{RC}(s) = K'_o + \underbrace{K'_{oo}\, s + \sum_i \frac{s K'_i}{(s+\sigma_i)}}_{Y_1}$$

$$Y_{RC}(s) = K'_o + Y_1(s)$$

E, procedendo in maniera esattamente duale a quanto visto con la sintesi di *Cauer I*, si arriva ad ottenere una rete del tipo



in cui la Y_{RC} si può esprimere come:

$$Z_{RC}(s)=\frac{1}{sC_1}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{R_2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{sC_3}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{R_4}+\cdots\cdots}}}$$

Esiste, anche in questo caso un modo per minimizzare i calcoli della sintesi che è perfettamente duale a quello visto per *Cauer I*.

Il metodo è di nuovo la divisione lunga

Esempio di sintesi

$$Z(S)=\frac{2S^2+8S+6}{S^2+2S}$$

$$2S+S^2)\,6+8S+2S^2)\ \frac{3}{S} \leftarrow \frac{1}{SC_1}$$

$$-6-3S$$

$$//\ 5S+2S^2)\ 2S+S^2)\ \frac{2}{5} \leftarrow \frac{1}{R_2}$$

$$-2S-4S^2$$

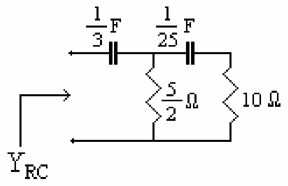
$$5$$

$$//\ \frac{S^2}{5}\ )\,5S+2S^2)\ \frac{25}{S} \leftarrow \frac{1}{SC_3}$$

$$-5S$$

$$//\ 2S^2)\ \frac{S^2}{5}\ )\ \frac{1}{10} \leftarrow \frac{1}{R_4}$$

Ottenendo come risultato della sintesi il seguente circuito.



Non trattiamo le reti RL.

Esse godono di proprietà inverse a a quelle viste per Z_{RC} e Y_{RC}

Esercizio 1

Sintetizzare Z(s) secondo Foster 1

$$Z(s) = 4\frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+4)}$$

Esercizio 2

Sintetizzare Y(s) secondo Foster 1

$$Y(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{4(s+2)(s+5)}$$

Traccia

Espandere Y in frazione parziali (si otterranno residui negativi)

➡ Espandere Y(s)/s e moltiplicare per s

Procedere con la sintesi

Esercizio 3

Sintetizzare Z(s) secondo Cauer 1

$$Z(s) = 4\frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+4)}$$

Esercizio 4

Sintetizzare Z(s) secondo Cauer 2

$$Z(s) = 4\frac{(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+4)}$$

Esercizio 5

Sintetizzare Z(s) secondo Cauer 1 e 2

$$Z(s) = 4\frac{(s^2+7s+10)}{(s^2+5s+4)}$$