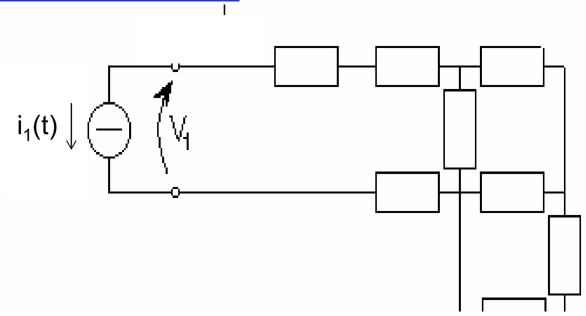
Immettenze di rete passive

Supponiamo di avere una rete costituita solo da (k-1) bipoli passivi e da un unico generatore di corrente.

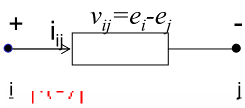


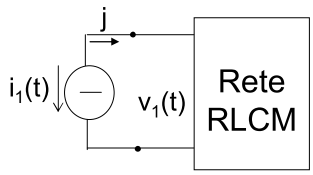
Fissato per ogni ramo un verso per le *i* si definiscono i vettori

$i \in \Re^k$ correnti di ramo

$e \in \Re^n$ tensioni di nodo (rispetto a massa)

$v \in \Re^k$ tensioni di ramo





Per il teorema di Tellegen $\sum_{i=1}^{k} v_i i_i^* = 0$

$$v_1 i_1^* + \sum_{i=2}^{k} v_i i_i^* = 0 \qquad -v_1 i_1^* = \sum_{i=2}^{k} v_i i_i^* \qquad v_1 j^* = \sum_{i=2}^{k} v_i i_i^*$$

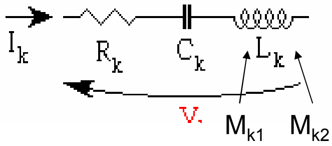
Per definizione di impedenza, nel dominio di s

$$Z(s) = \frac{V_1(s)}{J(s)} \qquad Z(s) = \frac{V_1(s)}{J(s)}\frac{J^*(s)}{J^*(s)} = \frac{1}{|J(s)|^2}\sum_{i=2}^{k} V_i I_i^*$$

$$\boxed{Z(s) = \frac{1}{|J(s)|^2}\sum_{i=2}^{k} V_i I_i^*}$$

Immettenze RLC

Supponiamo di avere un circuito di k rami costituito da generatori, resistori, condensatori e induttori.



In questa situazione un generico ramo passivo avra' la forma qui riportata. *

Definizione

Una funzione F(s) è una funzione reale positiva se

- F(s) è una funzione razionale reale (rapporto di polinomi a coefficienti reali)
- $\Re e\{F(s)\} \geq 0 \;\; \text{se} \; \Re e\{s\} \geq 0$

Teorema di Brune o di realizzabilità RLC

Se F(s) è un'immettenza RLC(M) allora F(s) è una funzione reale positiva.
Se F(s) è una funzione reale positiva allora esistono immettenze RLC(M) tali che

Z(s)=F(s) e Y(s)=F(s)

Cioè F(s) si dice 'realizzabile RLC(M)'

Dimostrazione (solo condizione necessaria)
Per il generico ramo * si ha

$$V_k = R_k I_k + \frac{1}{sC_k} I_k + sL_k I_k + s\sum_{j=1}^{M} M_{kj} I_j$$

Sostituendo V_k nell'espressione di Z(s)

$$Z(s) = \frac{1}{|I(s)|^2} \sum_k \left(R_k I_k I_k^* + \frac{1}{sC_k} I_k I_k^* + sL_k I_k I_k^* + s\sum_{j=1}^{M} M_{kj} I_j I_k^*\right)$$

Posto :

$$F_0(s)=\sum_k R_k|I_k|^2, \quad T_0(s)=\sum_k L_k|I_k|^2, \quad V_0(s)=\sum_k \frac{1}{C_k}|I_k|^2,$$

$$M_0(s)=\sum_k\sum_{j=1}^{M} M_{kj}I_jI_k^*$$

ed escludendo per semplicità la presenza di mutue, si ha

$$\boxed{Z(s)=\frac{1}{|J(s)|^2}[F_0(s)+sT_0(s)+\frac{1}{s}V_0(s)]}$$

da cui si conclude che

1) Z(s) è una funzione razionale a coefficienti reali

2) Poiché $F_0, T_0, V_0 \in \Re^+$, posto $s=\sigma+j\omega$ si ha

$$Re\{Z(s)\}=\frac{1}{|J(s)|^2}[F_0(s)+\sigma T_0(s)+\frac{\sigma}{\sigma^2+\omega^2}V_0(s)]$$

da cui

$\sigma \geq 0 \Rightarrow Re\{Z(s)\} \geq 0$, essendo tutti i termini positivi.

c.v.d

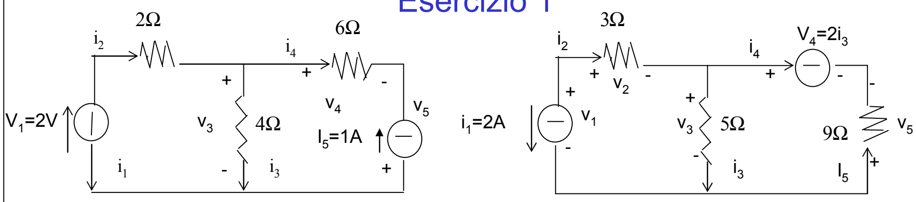
In alternativa al gruppo di condizioni appena specificate se ne può dare un altro del tutto equivalente, ma più semplice da verificare:

- Z(s) è una funzione razionale reale
- Re{Z(jω)}>=0 per tutti gli ω
- I poli di Z(s) hanno Re=<0

se i poli hanno Re=0 devono essere semplici e con residuo reale e positivo.

La **III** condizione esprime il fatto che il denominatore di Z(s) è un polinomio di Hurwitz

Esercizio 1



Verificare il teorema di Tellegen per le reti in figura

Traccia

- Determinare i vettori $\mathbf{i}_a$ e $\mathbf{i}_b$ delle correnti di ramo, ed i vettori $\mathbf{v}_a$ e $\mathbf{v}_b$ delle tensioni di ramo.
- Verificare che

$$v_a^T i_b = 0;\ v_a^T i_a = 0;\ v_b^T i_a = 0;\ v_b^T i_b = 0;$$

Esercizio 2

Data la funzione razionale

$$F(s) = 1 + \frac{s}{s^2+1}$$

accertare che sia reale positiva

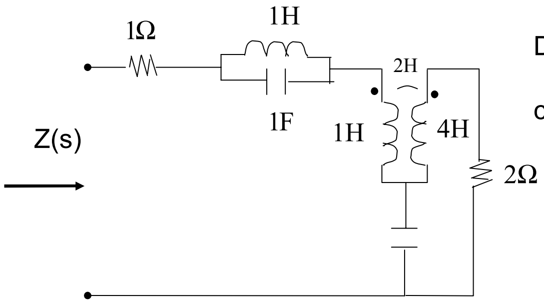
Esercizio 3

Data la funzione razionale

$$F(s) = \frac{2s+3}{s+1}$$

accertare che sia reale positiva

Esercizio 4



Determinare Z(s) e accertare

che sia reale positiva

Sintesi di circuiti
Immettenze LC

Introduzione
Condizioni di realizzabilità
Proprietà
Sintesi di Foster I
Sintesi di Foster II
Sintesi di Cauer I
Sintesi di Cauer II

Immettenze LC

$$Z_{LC}(s) = \frac{1}{|J(s)|^2}[sT_0(s) + \frac{1}{s}V_0(s)] \qquad Y_{LC}(s) = \frac{1}{|V(s)|^2}[s^*T_0(s) + \frac{1}{s^*}V_0(s)]$$

Se s_0 è uno zero di Z_{LC}, $Z_{LC}(s_0)=0$, ovvero

$$Z_{LC}(s_0) = \frac{1}{|J(s)|^2}[s_0T_0(s_0) + \frac{1}{s_0}V_0(s_0)] = 0$$

Essendo

$$\frac{1}{|J(s)|^2} > 0, \text{ allora } [s_0^2T_0(s_0) + V_0(s_0)] = 0 \Rightarrow s_0^2 = -\frac{V_0(s_0)}{T_0(s_0)} \leq 0$$

Infatti $\frac{V_0(s_0)}{T_0(s_0)} \geq 0$, in quanto rapporto di reali positivi.

Gli zeri di Z_{LC} sono PURAMENTE IMMAGINARI

Si potrà avere infatti:

$s_0 = 0$ se $V_0(s_0) = 0$ (non ci sono capacità)

$s_0 = \pm j\sqrt{\frac{V_0}{T_0}}$

$s_0 = \infty$ se $T_0(s_0) = 0$ (non ci sono induttanze)

Anche gli zeri di Y_{LC} sono puramente immaginari (la dim. è analoga).

Inoltre, essendo $Z_{LC}(s)=1/Y_{LC}(s)$, si ha che **zeri E POLI** di $Z_{LC}(s)$ e $Y_{LC}(s)$ sono **puramente immaginari**.

Inoltre, **i poli sono semplici ed hanno residuo reale e positivo** (dalle condizioni equivalenti a Brune)

$Z_{LC}(j\omega)$ è una FUNZIONE DISPARI

Infatti:

$$Z_{LC}(j\omega) = \frac{1}{|J(j\omega)|^2}[j\omega T_0(j\omega) + \frac{1}{j\omega}V_0(j\omega)] = $$
$$= j\frac{1}{|J(j\omega)|^2}[\omega T_0(j\omega) - \frac{V_0(j\omega)}{\omega}]$$

Anche $Y_{LC}(j\omega)$ è una funzione dispari (la dim. è analoga).

Ciò significa che Z_{LC} e Y_{LC} sono rapporti tra un polinomio pari ed uno dispari, ad esempio

$$Z_{LC}(s) = \frac{a_0 + a_2 s^2 + a^4 s^4 + ...}{b_1 s + b_3 s^3 + ...}$$

$$Z_{LC}(s) = \frac{a_1 s + a_3 s^3 + ...}{b_0 + b_2 s^2 + b_4 s^4 + ...}$$

Questo, a sua volta implica che

s=0: o uno zero o un polo di Z_{LC} o Y_{LC}
Cioè "0" E' UNA FREQUENZA CRITICA

s=∞: o uno zero o un polo di Z_{LC} o Y_{LC}
Cioè "∞" E' UNA FREQUENZA CRITICA

Una frequenza critica di F(s) è una frequenza s per la quale F(s) si annulla o va all' infinito (è uno zero o un polo di F(s)).

Poiché Z_{LC} è composta di poli e zeri immaginari semplici, compresi uno in 0 ed uno all' ∞

$$Z_{LC}(s) = K_\infty s + \frac{K_0}{s} + \sum_i \left(\frac{K_i}{s - j\omega_i} + \frac{K_i^*}{s + j\omega_i}\right)$$

$K_i = K_i^*$

Ove i K_i sono i RESIDUI

Poiché i poli sono semplici

$$\boxed{K_i = \lim_{s \to j\omega_i} (s - j\omega_i) Z_{LC}(s)}$$

$$Z_{LC}(s) = K_\infty s + \frac{K_0}{s} + \sum_i \left(\frac{K_i}{s - j\omega_i} + \frac{K_i^*}{s + j\omega_i} \right) =$$

$$= K_\infty s + \frac{K_0}{s} + \sum_i \frac{\mathbf{K}_i s}{s^2 + \omega_i^2}, \quad \text{con } \mathbf{K}_i = 2K_i$$

Essendo i residui reali

$$\text{Da cui} \quad Z_{LC}(j\omega) = j\left[K_\infty \omega - \frac{K_0}{\omega} + \sum_i \frac{\mathbf{K}_i \omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \right] = jX(\omega)$$

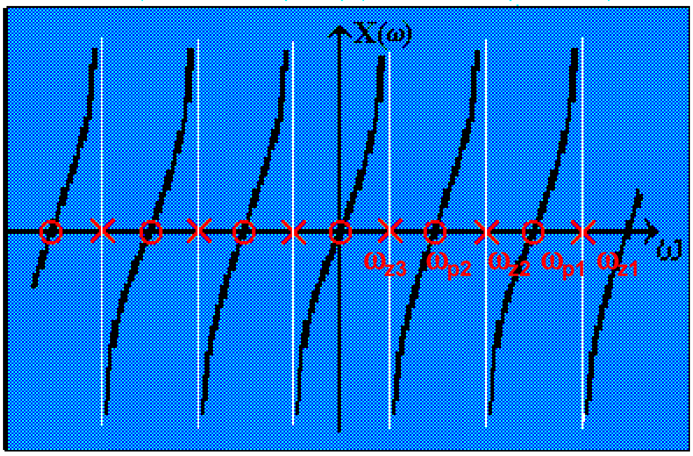
$X(\omega) \in \Re$ FUNZIONE REATTANZA

$$Z_{LC}(j\omega) = j\omega K_{oo} - j\frac{K_o}{\omega} + \sum_i \frac{j\omega K_i}{-\omega^2 + \omega_i^2} = jX(\omega)$$

Facciamo ora la derivata non di $X(\omega)$, che, come possiamo vedere, sarà sempre positiva in quanto i residui devono essere positivi, secondo quanto richiesto dalle condizioni di realizzabilità.

$$X'(\omega) = K_{oo} + \frac{K_o}{\omega^2} + \sum_i \frac{K_i(\omega^2 + \omega_i^2)}{(-\omega^2 + \omega_i^2)^2}$$

Il fatto che la derivata sia sempre positiva indica che la funzione è sempre crescente, da cui si può giustificare l' andamento di $Z_{LC}(j\omega)$ mostrato nella pagina successiva, che a sua volta dimostra l' alternanza di poli e zeri sullo asse immaginario.



$0 \leq \omega_{z1} < \omega_{p1} < \omega_{z2} < \omega_{p2} < \omega_{z3} < \omega_{p3} \cdots\cdots$

Condizioni di realizzabilità di immettenze LC

F(s) è una immettenza LC realizzabile se:

- F(s) è una funzione reale positiva e dispari
- F(s) è una funzione razionale reale con poli immaginari semplici con residuo strettamente positivo.
- F(s) è una funzione razionale reale tale che:
  1)poli e zeri sono semplici e alternati sull' asse immaginario.
  2)0 e ∞ sono frequenze critiche
  3)il livello di F(s) è positivo. (a_n / b_m)

Ovviamente questi tre gruppi di condizioni sono equivalenti.
Si noti che avere poli immaginari implica che il coniugato di ogni polo è ancora un polo.

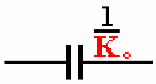
Sintesi di Foster I

Sovente Z_{LC} viene rappresentata secondo l'espansione di Foster:

$$Z_{LC}(s) = K_{\infty} s + \frac{K_0}{s} + \sum_i \frac{sK_i}{s^2+\omega_i^2}$$

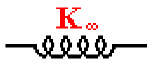
Tale espressione si può benissimo interpretare come una somma di immettenze, costituita ognuna da ogni singolo elemento dell' espansione, secondo le sottostanti indicazioni.

$\frac{K_0}{s} \longrightarrow$



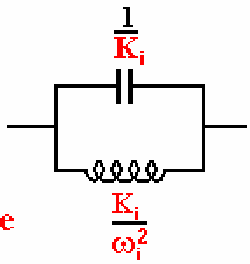
Elemento serie

$K_{\infty} s \longrightarrow$



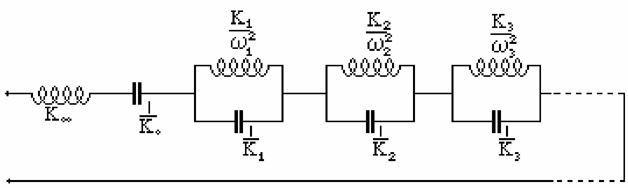
Elemento serie

$\frac{sK_i}{s^2+\omega_i^2} \longrightarrow$



Elemento serie

Combinando queste indicazioni possiamo ottenere il tipico esempio di rete di FOSTER I mostrato sotto.



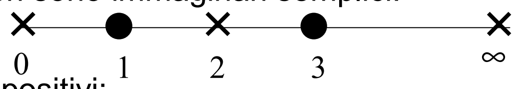
Esempio

Realizzare Z(s) mediante la sintesi di Foster 1

$$Z(s)=\frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

Z(s) è una funzione reattanza che che soddisfa le proprietà di un'immettenza LC:

I suoi poli e zeri sono immaginari semplici:



I residui sono positivi:

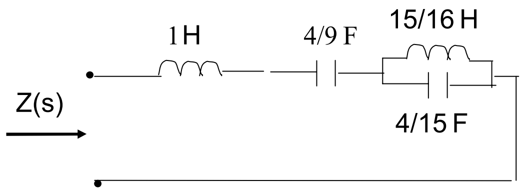
$$K_0=\lim_{s\to 0} s\cdot Z(s)=\frac{9}{4}$$

$$2K_2=\lim_{s^2\to -4}\frac{s^2+4}{s}Z(s)=\frac{15}{4}$$

$$K_\infty=\lim_{s\to\infty}\frac{Z(s)}{s}=1$$

L'espansione in frazioni parziali: $Z(s)=\dfrac{9/4}{s}+\dfrac{15s/4}{s^2+4}+s$

Il circuito equivalente



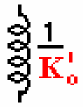
Sintesi di Foster II

Sovente Y_{LC} viene rappresentata secondo l'espansione di Foster:

$$Y_{LC}(s) = K'_\infty s + \frac{K'_o}{s} + \sum_i \frac{s K'_i}{s^2 + \omega_i^2}$$

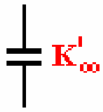
Tale espressione si può benissimo interpretare come una somma di ammettenze, costituita ognuna da ogni singolo elemento dell' espansione, secondo le sottostanti indicazioni.

$$\frac{K'_o}{s} \longrightarrow$$



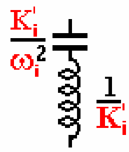
Elemento parallelo

$$K'_\infty s \longrightarrow$$



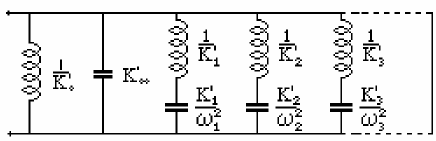
Elemento parallelo

$$\frac{s K'_i}{s^2 + \omega_i^2} \longrightarrow$$



Elemento parallelo

Combinando queste indicazioni possiamo ottenere il tipico esempio di rete di FOSTER II mostrato sotto.



Nelle sintesi di Foster il numero di componenti utilizzato è il minimo necessario

Sono perciò dette CANONICHE

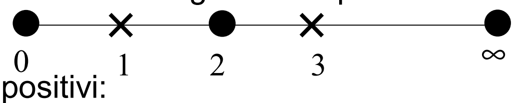
Esempio

Realizzare Y(s) mediante la sintesi di Foster 2

$$Y(s) = \frac{s(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

Y(s) è una funzione reattanza che che soddisfa le proprietà di un'immettenza LC:

I suoi poli e zeri sono immaginari semplici:



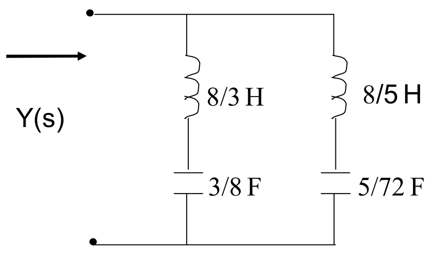
I residui sono positivi:

$$2K_1 = \lim_{s^2 \to -1} \frac{s^2+1}{s} Y(s) = \frac{3}{8}$$

$$2K_3 = \lim_{s^2 \to -9} \frac{s^2+9}{s} Y(s) = \frac{5}{8}$$

L'espansione in frazioni parziali : $Y(s) = \frac{3s/8}{s^2+1} + \frac{5s/8}{s^2+9}$

Il circuito equivalente



Rimozione di poli

Come introduzione ai successivi argomenti è ora bene vedere gli algoritmi di rimozione dei poli dalle immettenze RLCM realizzabili nei casi:

1. *Polo all' infinito.*
2. *Polo per s=0*
3. *Coppia di poli per s puramente immaginarie*

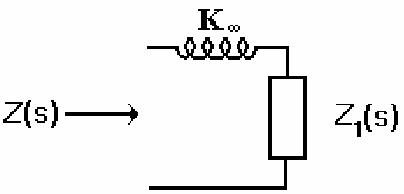
E' bene sottolineare l' utilità di questo algoritmo che permette, data una generica immettenza RLCM realizzabile, di ottenerne un' altra, sempre realizzabile, ma di grado minore.
A margine di questo discorso tratteremo anche *la rimozione di costanti.*

Rimozione di un polo all' infinito

Consideriamo una Z(s) RLCM realizzabile e supponiamo che abbia un polo all'infinito, allora, generalizzando *l' espansione di Foster*, potremo scrivere che $Z(s)=K_\infty s+Z_1(s)$.

A questo punto viene spontaneo interpretare la somma di 2 impedenze come la loro serie e l' addendo $K_\infty s$ come un induttore di induttanza K_∞

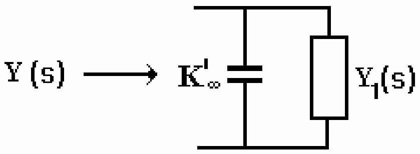
Quindi circuitalmente avremo che:



Si puo' verificare che $Z_1(s)$ è ancora realizzabile e che il suo grado è pari al grado di Z(s) diminuito di una unità.

Un discorso duale vale per le ammettenze RLCM realizzabili che abbiano un polo all'infinito.Infatti, generalizzando *l'espansione di Foster*, potremo scrivere che $Y(s)=K^{I}_{\infty}s+Y_1(s)$.

A questo punto viene spontaneo interpretare la somma di 2 ammettenze come il loro parallelo e l' addendo $K^{I}_{\infty}s$ come un condensatore di capacità K^{I}_{∞}. Circuitalmente ciò significa che:



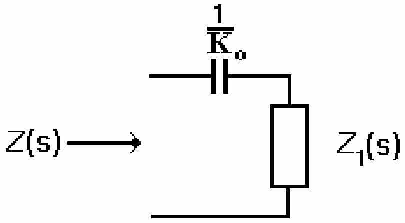
Si può verificare che $Y_1(s)$ è ancora realizzabile e che il suo grado è pari al grado di Y(s) diminuito di una unità.

Rimozione di un polo per s=0

Consideriamo una Z(s) RLCM realizzabile e supponiamo che abbia un polo per s=0, allora, generalizzando *l'espansione di Foster*, potremo scrivere che $Z(s)=K_0/s+Z_1(s)$.

Anche in questo caso la somma di due impedenze si interpreta come la loro serie,e l' addendo K_0/s come un condensatore di capacità $1/K_0$

Quindi circuitalmente avremo che:

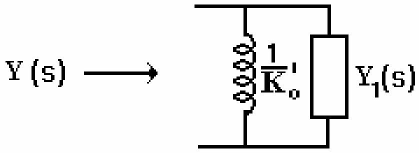


Si può verificare che $Z_1(s)$ è ancora realizzabile e che il suo grado è pari al grado di Z(s) diminuito di una unità.

Un discorso duale vale per le ammettenze RLCM realizzabili che abbiano un polo per s=0.Infatti, generalizzando *l'espansione di Foster*, potremo scrivere che $Y(s)=K^I_0/s+Y_1(s)$.

A questo punto viene spontaneo interpretare la somma di 2 ammettenze come il loro parallelo e l' addendo K^I_0/s come un induttore di induttanza $1/K^I_0$.

Quindi circuitalmente avremo che:

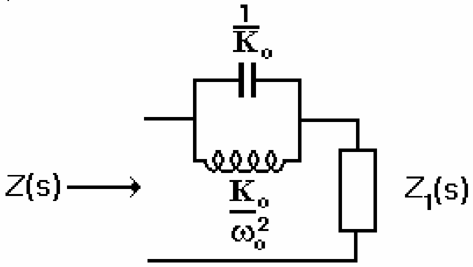


Rimozione di una coppia di poli per s immaginari puri

Consideriamo una Z(s) RLCM realizzabile e supponiamo che abbia una coppia di poli complessi e coniugati, allora, generalizzando *l'espansione di Foster*, potremo scrivere che:

$$Z(s)=\frac{sK_0}{s^2+\omega_0^2}+Z_1(s)$$

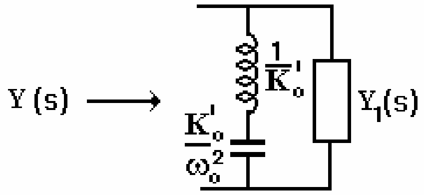
Interpretiamo ancora la somma di queste 2 impedenze come la loro serie, in cui il primo termine rappresenta il parallelo tra un condensatore e un induttore di valori specificati.



Un discorso duale vale per una ammettenza che abbia una coppia di poli complessi e coniugati, per la quale, generalizzando *l'espansione di Foster* potremo scrivere che:

$$Y(s) = \frac{sK'_o}{s^2 + \omega_o^2} + Y_1(s)$$

Anche questa volta possiamo interpretare la somma di 2 ammettenze come il loro parallelo, mentre il primo termine rappresenta la serie tra un condensatore e un induttore di valori specificati.



Rimozione di una costante

Consideriamo la solita Z(s) impedenza RLCM realizzabile e supponiamo di volerla scrivere come:

$$Z(s)=R+Z_1(s)$$

L' interpretazione circuitale non presenta alcuna difficoltà, in quanto si tratta di una serie tra una impedenza $Z_1(s)$ ed un elemento con impedenza costante, ossia un resistore.

Il discorso si complica quando vogliamo determinare se $Z_1(s)=Z(s)-R$ verifica ancora *le condizioni di realizzabilità.*

Infatti,benchè $Z_1(s)$ sia sicuramente ancora una funzione razionale reale, ed abbia gli stessi poli di Z(s), non è assolutamente detto che sia sempre

$$Re\{Z_1(j\omega)\}>=0$$

Questa condizione va quindi imposta, dunque dovremo avere che:

$$Re\{Z_1(j\omega)\}=Re\{Z(j\omega)\}-R>=0$$

ossia che $\min \mathrm{Re}\{Z(j\omega)\} >= R$

Anche in questo caso vale per le ammettenze RLCM realizzabili il discorso duale;potremo quindi scrivere:

$$Y(s)=G+Y_1(s)$$

ed interpretare questa scrittura come il parallelo tra G ed $Y_1(s)$.

Dal punto di vista della realizzabilità un discorso esattamente duale al precedente porta a scrivere che deve essere:

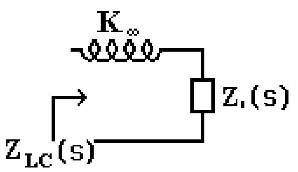
$$\min \mathrm{Re}\{Y(j\omega)\} >= G$$

Sintesi di Cauer I

Condideriamo un' impedenza LC scritta come *espansione di Foster.* Nell' ipotesi che abbia un polo all' infinito sarà vero che:

$$Z_{LC}(s)= K_{\infty}s+Z_1(s).$$

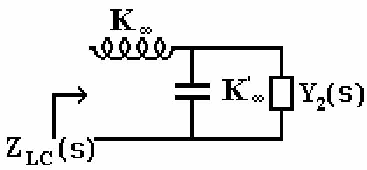
Il primo passo della sintesi consiste nel "estrarre" questo polo all' infinito. Circuitalmente questo **implica collegare un induttore-serie a** Z_1.



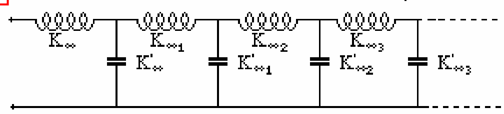
Ora è immediato verificare che $Z_1(s)$ ha uno zero all' infinito,perciò la sua inversa $Y_1(s)$ avrà un polo all' infinito, che potremo estrarre ottenendo

$$Y_1(s)=K_{\infty}s+Y_2(s)$$

Dal punto di vista circuitale questa estrazione consiste nel sostituire a $Y_1(s)$ un parallelo tra un condensatore e $Y_2(s)$..



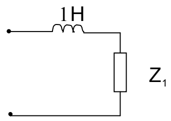
A questo punto si procede ricorsivamente, in quanto $Y_2(s)$ avrà uno zero, e la sua inversa $Z_2(s)$ un polo che estrarremo, e così via fino a ottenere una rete a scala di induttori serie e condensatori parallelo.



Esempio

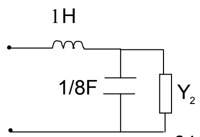
Sintetizzare l'impedenza $Z(s) = \dfrac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s}$

L'impedenza è realizzabile LC, quindi $Z(s) = K_\infty s + Z_1(s) = s + Z_1(s)$

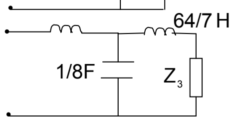


$$Z_1(s) = Z(s) - s = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s} - s = \frac{8s^2 + 9}{s^3 + 2s}; \text{ zero all'}\infty$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{s^3 + 2s}{8s^2 + 9}; \text{ polo all'}\infty$$

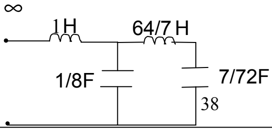


$$Y_2(s) = Y_1(s) - K'_\infty s = Y_1(s) - \frac{s}{8} = \frac{7s}{8(8s^2 + 9)}; \text{ zero all'}\infty$$



$$Z_2(s) = \frac{1}{Y_2(s)} = \frac{8(8s^2 + 9)}{7s}; \text{ polo all'}\infty$$

$$Z_3(s) = Z_2(s) - K_\infty s = \frac{8(8s^2 + 9)}{7s} - \frac{64}{7}s = \frac{72}{7s}; \text{ zero all'}\infty$$



Lo stesso risultato si può ottenere più rapidamente con la tecnica della divisione lunga, che spiegheremo applicandola a:

$$Z(s)=\frac{s^4+10s^2+9}{s^3+2s}$$

1 L' algoritmo che regola questa tecnica consiste innanzitutto nello scrivere affiancati a partire da sinistra il denominatore ed il numeratore della immettenza in oggetto .Ovviamente questo primo passo si può fare solo se Z(s) ha un polo all' infinito.

2 Il secondo passo consiste nel determinare il rapporto tra i termini di grado massimo dei due polinomi, prendendo per denominatore quello più a sinistra;detto termine specificherà un elemento della rete a scala secondo le corrispondenze *già enunciate*

3 A questo punto dobbiamo sottrarre al numeratore il denominatore moltiplicato per il termine trovato al passo precedente.Il risultato di questa operazione si scriverà a sinistra del denominatore.Ciò permette di tornare al passo 2.

Con la divisione lunga

$$s^3+2s)\ s^4+10s^2+9)\ s \quad SL_1$$

$$-s^4-2s^2$$

$$//\ 8s^2+9)\ s^3+2s)\ \frac{1}{8}s \quad SC_2$$

$$-s^3-\frac{9}{8}s$$

$$//\ \frac{7}{8}s)\ 8s^2+9)\ \frac{64}{7}s \quad SL_3$$

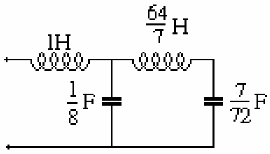
$$-8s^2$$

$$//\ 9)\ \frac{7}{8}s)\ \frac{7}{72}s \quad SC_4$$

$$-\frac{7}{8}s$$

$$//$$

La figura sottostante rappresenta la realizzazione circuitale della rete del precedente esempio.



La stessa informazione può essere rappresentata in modo più sintetico con una unica formula.

$$Z(s)=sL_1+\cfrac{1}{sC_2+\cfrac{1}{sL_3+\cfrac{1}{sC_4+\ldots\ldots}}}$$

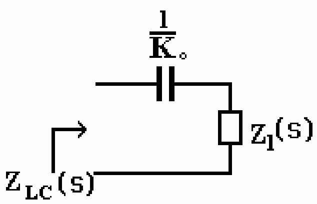
Si noti che tutto il discorso fatto finora vale ancora se prendiamo in esame una ammettenza, a patto però di cambiare le corrispondenze tra i vari residui K_i e i componenti circuitali nel modo indicato nel paragrafo riguardante *la sintesi di Foster II*

Sintesi di Cauer II

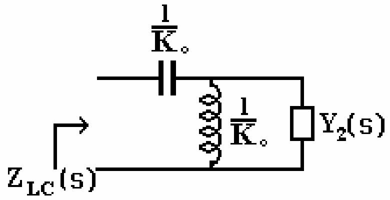
Condideriamo un' impedenza LC scritta come *espansione di Foster* e scriviamola come sotto.

$$Z_{LC}(s)= K_o/s+Z_1(s).$$

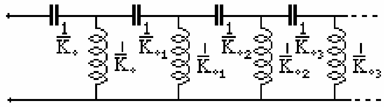
Supponendo K_o non nullo il primo passo della sintesi consiste nell' estrarre questo polo in zero K_o e circuitalmente questo **implica collegare un condensatore-serie a Z_1**.



Una banale verifica numerica porta poi a scoprire che $Z_1(0)=0$ ossia che $Z_1(s)$ ha un zero s=0 e quindi $Y_1(s)$ avra' un polo in zero.Tale polo potrà poi essere estratto **dando così:**



A questo punto si procede ricorsivamente, in quanto $Y_2(s)$ avrà uno zero, e la sua inversa $Z_2(s)$ un polo che estrarremo, e così via fino a ottenere una rete a scala di condensatori-serie e induttori-parallelo.



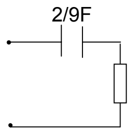
Lo stesso risultato si può ancora una volta ottenere più rapidamente con la tecnica della divisione lunga,che vedremo con il prossimo esempio.

L'algoritmo consiste ancora nello scrivere affiancati a partire da **sinistra** il **denominatore** ed il numeratore dell'immettenza in oggetto.Questa volta però si determina **il rapporto tra i termini di grado minimo**, prendendo sempre come denominatore il termine più a sinistra.

Esempio

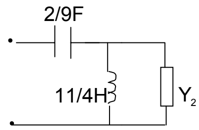
Sintetizzare l'impedenza $Z(s) = \dfrac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s}$

L'impedenza è realizzabile LC, quindi $Z(s) = \dfrac{K_0}{s} + Z_1(s) = \dfrac{9}{2s} + Z_1(s)$



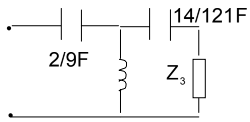
$$Z_1(s) = Z(s) - \frac{9}{2s} = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 2s} - \frac{9}{2s} = \frac{s^3 + (11/2)s}{s^2 + 2}; \quad \text{zero in 0}$$

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{s^2 + 2}{s^3 + (11/2)s}; \quad \text{polo in 0}$$



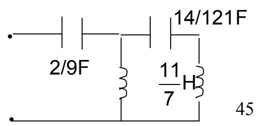
$$Y_2(s) = Y_1(s) - \frac{K'_0}{s} = Y_1(s) - \frac{4}{11s} = \frac{s^2 + 2}{s^3 + (11/2)s} - \frac{4}{11s} = \frac{14s^2}{11s(2s^2 + 11)}; \quad \text{zero in 0}$$

$$Z_2(s) = \frac{1}{Y_2(s)} = \frac{11s(2s^2 + 11)}{14s^2}; \quad \text{polo in 0}$$



$$Z_3(s) = Z_2(s) - \frac{K_0}{s} = \frac{11s(2s^2 + 11)}{14s^2} - \frac{121}{14s} =$$

$$= \frac{11s}{7};$$



Con la divisione lunga

$2s + s^3 \,)\, 9 + 10s^2 + s^4 \,)\, \dfrac{9}{2s} \leftarrow \dfrac{1}{sC_1}$

$-9 - \dfrac{9}{2}s^2$

$// \quad \dfrac{11}{2}s + s^3 \,)\, 2 + s^2 \,)\, \dfrac{4}{11s} \leftarrow \dfrac{1}{sL_2}$

$-2 \; \dfrac{-4}{11}s^2$

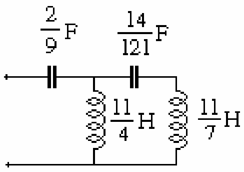
$// \quad \dfrac{7}{11}s \,)\, \dfrac{11}{2} + s^2 \,)\, \dfrac{121}{14s} \leftarrow \dfrac{1}{sC_3}$

$-\dfrac{11}{2}$

$// \quad +s^2 \,)\, \dfrac{7}{11}s \,)\, \dfrac{7}{11s} \leftarrow \dfrac{1}{sL_4}$

$//$

La figura sottostante rappresenta la realizzazione circuitale della rete del precedente esempio, con accanto la stessa informazione rappresentata in modo piu' sintetico con una unica formula.



$$Z(s)=\frac{1}{sC_1}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{sC_3}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{sL_4}+\ldots\ldots}}}$$

Si noti che tutto il discorso fatto finora vale ancora se prendiamo in esame una ammettenza, a patto però di cambiare le corrispondenze tra i vari residui K_i e i componenti circuitali nel modo indicato nel paragrafo riguardante *la sintesi di Foster II*

Anche nelle sintesi di Cauer il numero di componenti utilizzato è il minimo necessario (sono anche esse CANONICHE)

Esercizio 1

Data la funzione

$$Z(s)=\frac{3s^6+17s^4+21s^2+3}{s^5+4s^3+3s}$$

verificare la LC - realizzabilità e scomporre in fratti semplici.

Dimostrare che

$$2K_i=\lim_{s\to-\omega_i^2}\frac{s^2+\omega_i^2}{s}Z(s)$$

Traccia

Verificare la LC-realizzabilità usando la II condizione

Esercizio 2

Realizzare una rete di impedenza Z(s) mediante la sintesi di Foster 1

$$Z(s) = \frac{s(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

Esercizio 3

Realizzare una rete di ammettenza Y(s) mediante la sintesi di Foster 2

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)}$$

Esercizio 4

Realizzare una rete di impedenza Z(s) mediante la sintesi di Cauer 1

$$Z(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3)(s^2+5)}{s(s^2+2)(s^2+4)}$$

Esercizio 5

Realizzare una rete di impedenza Z(s) mediante la sintesi di Cauer 2

$$Z(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3)(s^2+5)}{s(s^2+2)(s^2+4)}$$

Esercizio 6

Sintetizzare una rete di ammettenza Y(s)

$$Y(s) = \frac{(s^2+1)(s^2+3)}{2s(s^2+2)(s^2+5)}$$

Soluzione

$K_{\infty}=0$ $K_0=3/20$ $K_2=1/12$ $K_5=4/15.$

Circuitalmente otteniamo: