Impedenze RLCM

Funzioni minime
Sintesi di Brune
Ciclo di Brune
Esempio di sintesi

Funzioni minime

Data un'impedenza **Z(s)** :

- Se **Z(s)** non ha poli immaginari allora è detta funzione a reattanza minima

Data un'ammettenza **Y(s)** :

- Se **Y(s)** non ha poli immaginari allora è detta funzione a suscettanza minima

Quindi se una funzione non ha nè zeri nè poli immaginari è a reattanza e a suscettanza minima.

Un'immettenza F(s) tale che:

$$\exists\, \omega_* : \ \mathrm{Re}[\, F(j\omega_*)\,] = 0$$

ed inoltre

$$\exists\, \omega_*' : \ \mathrm{Re}\left[\frac{1}{F(j\omega_*')}\right] = 0$$

è detta funzione a parte reale minima.

Una funzione reale positiva che sia contemporaneamente

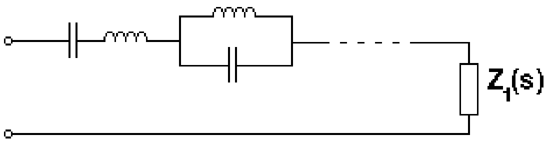
- a reattanza minima
- a suscettanza minima
- a parte reale minima

si dice funzione minima.

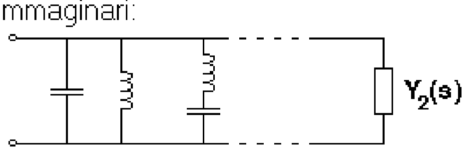
Le funzioni minime non possono essere sintetizzate con *Cauer* o *Foster* poichè non si possono estrarre costanti, poli o zeri.

Per sintetizzare una generica $Z_{RLCM}(s)$ si procede come segue:

1) Si estraggono poli immaginari fino a trovare una $Z_1(s)$ senza poli immaginari:



2) Si estraggono poli immaginari dalla $Y_1(s)=1/Z_1(s)$ fino a trovare una $Y_2(s)$ senza poli immaginari:



3) Si ritorna al punto 1 finchè l'immettenza residua non ha più nè zeri nè poli immaginari.

4) Si estrae una costante reale dall' immettenza residua in modo da avere una funzione a parte reale minima.

5) Se l'immettenza è funzione minima si effettua la *sintesi di Brune* , in caso contrario si torna al punto 1 .

Sintesi di Brune

Sia $Z(s)$ funzione minima, cioè:

- non ha zeri o poli immaginari
- $\exists\, w_1 : Z(jw_1)=jX_1$ cioè puramente immaginaria.

Nota:

Si procede diversamente a seconda che sia:

$$X_1 \gtrless 0$$

Noi tratteremo solo il caso $\boxed{X_1 < 0.}$

$Z(jw_1)=jX_1$

A questo punto si può provare ad estrarre una capacità tale che sia:

$$Z = \frac{1}{sC} + Z_1 \quad \text{con} \quad Z_1(j\omega_1) = 0$$

Quindi la capacità varrebbe:

$$C = -\frac{1}{\omega_1 X_1} > 0$$

Ma allora la Z_1 sarebbe:

$$Z_1 = Z - \frac{1}{sC}$$

che ha un residuo negativo in $s=0$ e quindi non è *realizzabile* .

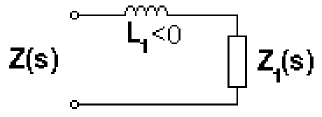
Allora si può provare ad estrarre un'induttanza anzichè una capacità:

$Z_1 = Z - sL_1$ che deve valere 0 in $s = jw_1$

Quindi:

$$0 = Z(j\omega_1) - j\omega_1 L_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{X_1}{\omega_1} < 0$$

E' un'induttanza negativa e quindi non realizzabile, ma il problema verrà risolto fra breve con un semplice artificio.



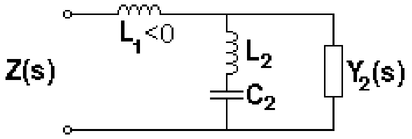
ove $Z_1(s)$ ha una coppia di zeri in $s = \pm jw_1$ ed un polo all'infinito:

$$k_\infty = -L_1 > 0$$

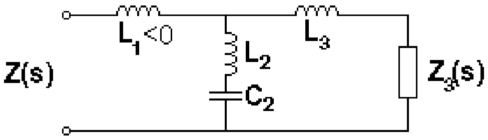
e quindi Z_1 è ancora realizzabile.
Si estraggono allora da Z_1 i due zeri immaginari (cioè si estraggono da $Y_1 = 1/Z_1$ i due poli):

$$Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)} = \frac{k_2 s}{s^2 + \omega_1^2} + Y_2(s)$$

il che circuitalmente equivale a:



Y_2 mantiene lo zero all'infinito, quindi il suo reciproco, Z_2 , ha un polo all'infinito, che si estrae:



A questo punto notiamo che: $Z(s) = \frac{(n)}{(n)}$

Essendo una funzione minima deve avere stesso grado a num. e den.

Se Z aveva grado n

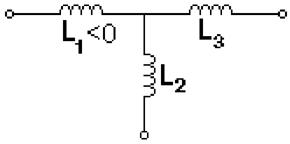
Z_1 ha grado **n+1**

Z_2 ha grado **n-1** (si sono rimossi due zeri immaginari coniugati)

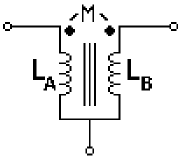
Z_3 ha grado **n-2** (si è rimosso un polo all'infinito)

A questo punto, se Z_3 è minima si itera Brune, altrimenti si ripetono i punti da 1) a 5) fino a riottenere una funzione minima, al che si itera Brune.

Affrontiamo ora il problema dell'induttanza L_1 negativa:



$$[Z] = \begin{bmatrix} s(L_1+L_2) & sL_2 \\ sL_2 & s(L_2+L_3) \end{bmatrix}$$



$$[Z]=\begin{bmatrix} sL_A & sM \\ sM & sL_B \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} L_A, L_B > 0 \\ L_A L_B \geq M^2 \Longleftrightarrow k=\dfrac{|M|}{\sqrt{L_A L_B}} \leq 1 \end{array}$$

Vediamo ora se è possibile sostituire i mutui induttori in figura (dei quali sono indicate le condizioni di realizzabilità) alla stella, cioè se sono accettabili le condizioni sotto le quali le matrici **[** Z **]** sono uguali:

$$\begin{cases} L_A = L_1 + L_2 > 0 \\ L_B = L_2 + L_3 > 0 \\ M = L_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} L_1 < 0 \\ L_2, L_3 > 0 \end{array}$$

L'impedenza del circuito si può scrivere come:

$$Z(s)=sL_1+\frac{1}{\dfrac{1}{sL_2+\dfrac{1}{sC_2}}+\dfrac{1}{sL_3+Z_3}} \doteq$$

poichè Z_3 non ha polo all'infinito, come pure Z che è minima,

$$\lim_{s\to\infty} Z_3(s) = \lim_{s\to\infty} Z(s) \neq \infty$$

Studiamo $Z_1(s)$ per $s \to \infty$

$$Z(s) \to sL_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{sL_2}+\dfrac{1}{sL_3}} = s\left(L_1 + \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3}\right)$$

Affinchè questo limite non tenda all'∞ è necessario che

$$\left(L_1 + \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3}\right) = 0$$

ovvero

$$L_1 = -\frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3} < 0$$

Quindi le condizioni di realizzabilità dei mutui induttori sono verificate, infatti si ha:

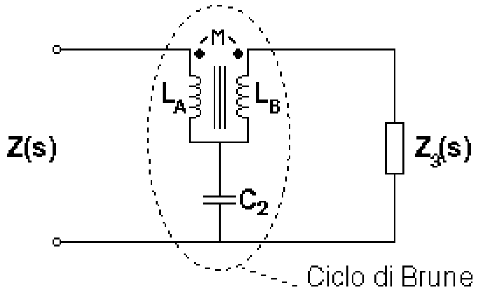
$$\begin{cases} L_A = L_1 + L_2 = L_2 - \dfrac{L_2 L_3}{L_2 + L_3} = \dfrac{L_2^2}{L_2 + L_3} > 0 \\ L_B = L_2 + L_3 > 0 \\ L_A L_B = L_2^2 = M^2 \end{cases}$$

$$M = L_2 > 0$$

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_A L_B}} = \frac{L_2}{\sqrt{\dfrac{L_2^2 (L_2 + L_3)}{L_2 + L_3}}} = 1$$

c.v.d.

Allora si possono sostituire i mutui induttori (strettamente accoppiati) alla stella irrealizzabile:



A questo punto, se $Z_3(s)$ è ancora minima, si può iterare il procedimento ottenendo un altro ciclo di Brune, e così via.

La sintesi si può così terminare, e da questo segue che una funzione reale positiva è SEMPRE realizzabile.

Esempio di sintesi

Vediamo ora un esempio di applicazione della *sintesi di Brune*:

$$Z'(s)=\frac{8s^2+s+4}{24s^3+11s^2+20s+1} \Longrightarrow Y'(s)=\frac{24s^3+11s^2+20s+1}{8s^2+s+4} \doteq$$

ha un polo all'infinito, quindi estraggo un condensatore in parallelo:

$$\doteq 3s+Y(s)$$

L'ammettenza residua **Y(s)** è:

$$Y(s)=\frac{8s^2+8s+1}{8s^2+s+4}$$

e presenta:

due zeri reali negativi: $-4\pm\sqrt{16-8}$

due poli complessi coniugati: $-1\pm\sqrt{1-64}$

Vediamo la parte reale di **Z(s)=1/Y(s)** calcolata in **s=jw**:

$$\mathrm{Re}[\,Z(j\omega)\,]=\mathrm{Re}\left[\frac{-8\omega^2+j\omega+4}{-8\omega^2+8j\omega+1}\right]=\frac{4(4\omega^2-1)^2}{64\omega^4+48\omega^2+1}\geq 0\ ,=0\ \text{ per }\ \omega=\pm\frac{1}{2}$$

Analogamente si vede che **Re[Y(jw)] = 0** ammette soluzioni e quindi **Z(s)** è funzione minima.

$$X(w)=\mathrm{Im}[\,Z(iw)\,]=\left.\frac{56\omega^3-31\omega}{64\omega^4+48\omega^2+1}\right|_{\omega=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2} \Longrightarrow X_1=-\frac{1}{2}<0$$

Quindi sono verificate le ipotesi per applicare la *sintesi di Brune*:

$$Z(s)=sL_1+Z_1(s) \qquad \text{con} \quad Z_1(j\tfrac{1}{2})=0 \quad \Longrightarrow \quad L_1=-1H$$

Allora

$$Z_1 = Z - sL = \frac{8s^3+16s^2+2s+4}{8s^2+8s+1}$$

ha un polo all'infinito ed una coppia di zeri immaginari: estraggo gli zeri (poli di $\mathbf{Y_1}$) :

$$Y_1 = \frac{8s^2+8s+1}{8s^3+16s^2+2s+4}$$

Per costruzione i poli sono per $\mathbf{s=\pm j/2}$, quindi il denominatore è:

$$\left(s^2+\frac{1}{4}\right)(As+B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A=8 \\ B=16 \end{cases}$$

e allora posso scrivere la $\mathbf{Y_1}$ come:

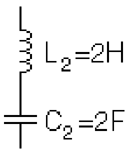
$$Y_1(s) = \frac{8s^2+8s+1}{\left(s^2+\frac{1}{4}\right)(8s+16)} = \frac{K_1 s}{s^2+\frac{1}{4}} + Y_2(s)$$

essendo:

$$k_1 = \left[\left(s-\frac{j}{2}\right)\frac{8s^2+8s+1}{\left(s-\frac{j}{2}\right)\left(s+\frac{j}{2}\right)(8s+16)}\right]_{s=\frac{j}{2}} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad K_1 = \frac{1}{2}$$

Circuitalmente abbiamo che:

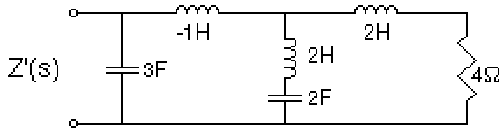
$$\frac{\frac{s}{2}}{s^2+\frac{1}{4}} \longrightarrow$$



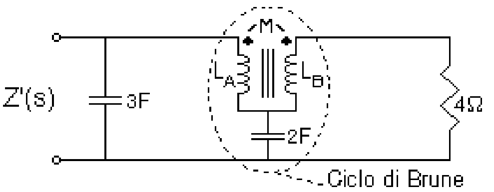
L'ammettenza residua è:

$$Y_2 = Y_1 - \frac{\frac{s}{2}}{s^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2s+4} \implies Z_2 = 2s+4$$

Quindi in definitiva la rete è:



A questo punto non rimane che calcolare i valori dei mutui induttori da sostituire alla stella irrealizzabile per completare la sintesi :

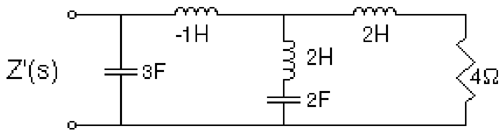


$$\begin{cases} L_A = L_1 + L_2 = 1H \\ L_B = L_2 + L_3 = 4H \\ M = L_2 = 2H \end{cases}$$

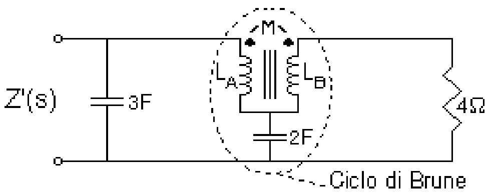
L'ammettenza residua è:

$$Y_2 = Y_1 - \frac{\frac{s}{2}}{s^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2s+4} \implies Z_2 = 2s+4$$

Quindi in definitiva la rete è:



A questo punto non rimane che calcolare i valori dei mutui induttori da sostituire alla stella irrealizzabile per completare la sintesi :



$$\begin{cases} L_A = L_1 + L_2 = 1H \\ L_B = L_2 + L_3 = 4H \\ M = L_2 = 2H \end{cases}$$