

## I FILTRI ATTIVI

Prima di addentrarci nell'analisi dettagliata dei filtri attivi, giova tentare di dare una definizione al termine *filtro*.

Un filtro è un doppio bipolo che, una volta inserito fra generatore ed utilizzatore, fornisce a quest'ultimo la massima potenza quando la frequenza del segnale applicato all'entrata è compresa fra uno o più intervalli di frequenze, ciascuno dei quali prende il nome di *banda passante*, mentre impedisce la trasmissione del segnale nel campo, o nei campi, di frequenze complementari ai precedenti, ciascuno dei quali prende il nome di *banda attenuata*.

In relazione al comportamento in frequenza presentato dei filtri stessi, è possibile effettuare una prima distinzione: i tipi più diffusi sono i seguenti:

- filtro passa basso [ low pass - LP ]
- filtro passa banda [ band pass - BP ]
- filtro passa alto [ high pass - HP ]
- filtro a reiezione di banda [ band rejection - BR ]
- filtro passa tutto [ all pass - AP ].

Il filtro **Passa Basso** presenta la banda passante per frequenze da 0 a  $f_0$ , mentre la banda attenuata va da  $f_0$  all'infinito.

Il filtro **Passa Banda** ha la banda attenuata da 0 a  $f_1$ , passante da  $f_1$  a  $f_2$  ed ancora attenuata da  $f_2$  all'infinito.

Il filtro **Passa Alto** palesa la banda attenuata da 0 a  $f_0$  e passante da  $f_0$  all'infinito.

Il filtro a **Reiezione di Banda** o "filtro elimina banda" è il complementare del filtro passa banda, pertanto presenterà la banda passante da 0 a  $f_1$ , attenuata da  $f_1$  a  $f_2$ , ed ancora passante da  $f_2$  all'infinito.

Il filtro **Passa Tutto** ha la proprietà di non variare il modulo della sua funzione di trasferimento al variare della frequenza, ma presenta una rotazione di fase di  $360^\circ$  attorno ad una data frequenza.

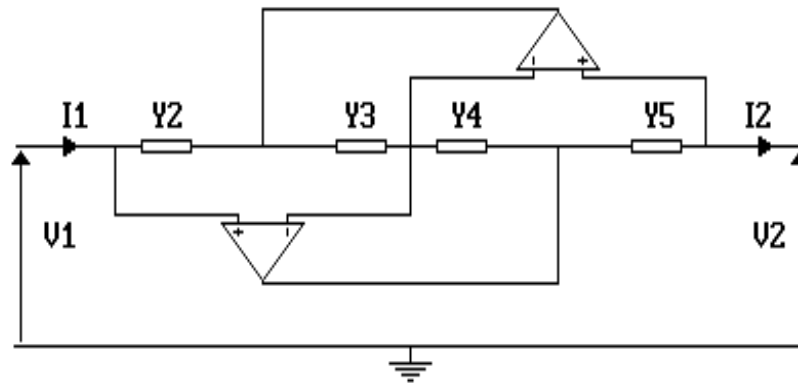
Senza addentrarci minimamente nella complessa teoria che sta alla base della sintesi dei filtri passivi, ci basti pensare che, normalmente, un filtro passivo presenta un numero di induttori circa pari al numero di condensatori che lo compongono. Gli induttori sono i componenti che danno la maggior quantità di problemi sia nella loro costruzione che nel loro utilizzo, infatti sono generalmente ingombranti, costosi, scarsamente integrabili e presentano una buona dose di parametri parassiti che allontanano il funzionamento pratico da quanto ci si attenda dal calcolo teorico del filtro. Si è quindi cercato di orientarsi su celle che utilizzino solo resistori e condensatori, tentando di ovviare all'assenza di induttori con l'uso di componenti attivi, prevalentemente amplificatori operazionali. Simili circuiti vengono generalmente definiti *Circuiti RC Attivi*.

In questo capitolo affronteremo inizialmente il problema della simulazione di induttori, per poi addentrarci nello studio di diverse soluzioni circuitali per la realizzazione dei vari tipi di filtro.

## CONVERTITORE DI IMMETTENZA GENERALIZZATO (GIC)

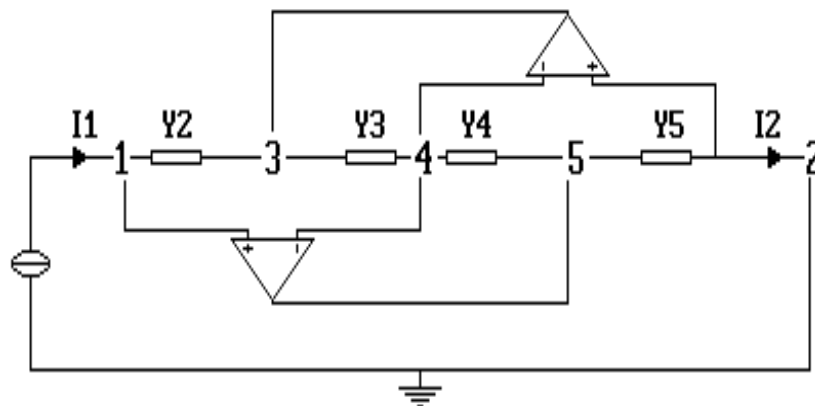
Per il circuito in figura, vogliamo calcolare i parametri di catena A,B,C,D: tali parametri sono i coefficienti delle incognite del sistema:

$$\begin{cases} V_1 = A \cdot V_2 + B \cdot I_2 \\ I_1 = C \cdot V_2 + D \cdot I_2 \end{cases}$$



**GIC di Antoniou**

Per valutare  $A \equiv V_1/V_2$  con  $I_2=0$  basta osservare che, nell'ipotesi di operazionali ideali, non essendoci caduta di tensione fra i morsetti invertente e non invertente, l'ingresso è equipotenziale all'uscita, pertanto  $V_1=V_2$  e quindi  $A=1$ . Per il calcolo relativo a  $B \equiv V_1/I_2$  con  $V_2=0$ , per lo stesso motivo precedente, anche  $V_1$  sarà nullo, e pertanto  $B=0$ . Per quanto concerne  $C \equiv I_1/V_2$  con  $I_2=0$ , ovvero con l'uscita a vuoto, basta notare che, essendo l'operazionale ideale ed essendo nulla la corrente  $I_2$ , sarà nulla anche la corrente che circola in  $Y_5$ . Ciò vuol dire che sarà nulla la caduta di tensione ai capi di  $Y_5$  e non essendoci differenza di potenziale fra i morsetti invertente e non invertente dell'operazionale, non ci sarà caduta di tensione nemmeno su  $Y_4$ , il che si traduce nell'asserzione che anche la corrente che circola in  $Y_4$  dovrà essere nulla. Non entrando corrente negli operazionali ed essendo nulla la corrente in  $Y_4$ , dovrà essere nulla anche la corrente che circola in  $Y_3$  e quindi, su di essa, non ci sarà caduta di tensione. Tenendo presente che essendoci un potenziale nullo fra i due morsetti dell'operazionale, sarà nulla la caduta su  $Y_2$  e quindi sarà nulla anche la corrente che vi circola. Non entrando corrente nel morsetto non invertente dell'operazionale, se ne deduce che anche  $I_1$  sarà nulla, e quindi  $C=0$ .



**Circuito per il calcolo di D**

Calcoliamo ora  $D \equiv I_1/I_2$  valutato con  $V_2=0$ , ovvero con l'uscita chiusa in corto circuito, così come da figura. Essendo l'uscita chiusa in corto circuito, la tensione ai nodi 1, 2 e 4 sarà nulla, in quanto  $V_2$  è nulla a causa del corto circuito,  $V_4$  è nulla in quanto ai morsetti di ingresso di un operazionale non cade tensione, e  $V_1$  è pari a 0 V per lo stesso motivo. A questo punto non resta che risolvere le equazioni ai nodi 3 e 5, ricordando, come sempre, che essendo gli operazionali ideali, non entra corrente nei loro morsetti di ingresso.

$$\begin{cases} I_1 = -V_3 \cdot Y_2 \\ -V_3 \cdot Y_3 = V_5 \cdot Y_4 \end{cases} \text{ [equazioni rispettivamente ai nodi 3 e 5]}$$

Inoltre  $I_2 = V_5 Y_5$

Risolvendo il sistema, otteniamo  $V_3 = -\frac{I_1}{Y_2}$  e  $V_5 = \frac{I_1 Y_3}{Y_2 Y_4}$  da cui, sostituendo,  $I_2 = I_1 \cdot \frac{Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4}$  e quindi  $D = \frac{Y_2 Y_4}{Y_3 Y_5}$ .

Quindi il sistema risulta essere:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ I_1 = \frac{Y_2 Y_4}{Y_3 Y_5} \cdot I_2 \end{cases}$$

Se ora carichiamo l'uscita con un'impedenza  $Z_L$ , osservando che vale la relazione  $Z_L = \frac{V_2}{I_2}$  ovvero  $I_2 = \frac{V_2}{Z_L}$ , calcoliamoci l'impedenza di ingresso  $Z_{ing}$  che si vede guardando fra il morsetto 1 e la massa; essa sarà pari a  $Z_{ing} = \frac{V_1}{I_1}$ , cioè:

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{A \cdot V_2 + B \cdot \frac{V_2}{Z_L}}{C \cdot V_2 + D \cdot \frac{V_2}{Z_L}}$$

Semplificando  $V_2$  e facendo il m.c.m. potremo scrivere che:

$$Z_{ing} = \frac{A \cdot Z_L + B}{C \cdot Z_L + D}$$

Sostituendo i nostri parametri di catena, potremo scrivere che nel caso in analisi, l'impedenza di ingresso  $Z_{ing}$  vale:

$$Z_{ing} = \frac{Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4} \cdot Z_L$$

Resta evidente, a questo punto, che se al posto di  $Y_3$  mettessimo un condensatore di capacità  $C_3$  e al posto delle restanti ammettenze  $Y_i$  mettessimo altrettante resistenze di valore  $R_i$ , la  $Z_{ing}$  diventerebbe:

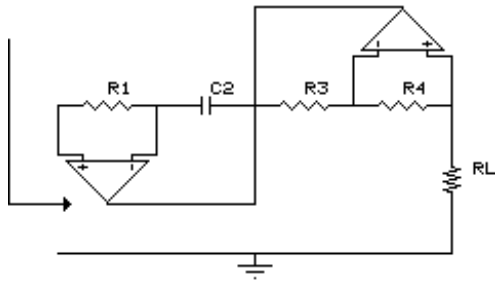
$$Z_{ing} = j\omega \cdot \frac{C_3 R_2 R_4 R_L}{R_5}$$

che ha le dimensioni, come si può ben notare, di un'impedenza con un capo a massa. Lo stesso ragionamento vale se sostituissimo  $Y_5$  con una capacità di valore  $C_5$  e, come prima, tutte le altre ammettenze con delle resistenze. In questo caso otterremmo:

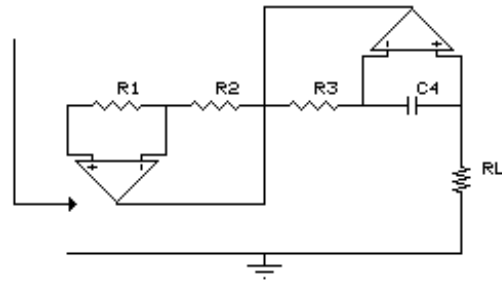
$$Z_{ing} = j\omega \cdot \frac{C_5 R_2 R_4 R_6}{R_5}$$

I circuiti relativi sono riportati in figura.

$$Z = j\omega C2 \cdot R1 \cdot R3 \cdot RL / R4$$



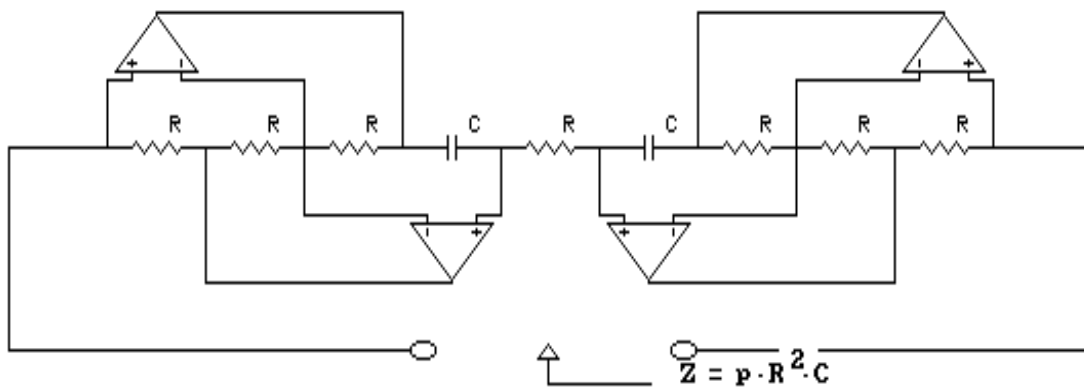
$$Z = j\omega C5 \cdot R1 \cdot R3 \cdot RL / R3$$



*Induttanze ideali*

Con questo tipo di circuito, siamo quindi in grado di simulare induttanze ideali con un capo a massa. È facile dimostrare, e lo lasciamo all'attento lettore, che per realizzare induttanze fluttuanti, cioè sospese, ovvero senza capi a massa, sarà necessaria la connessione di due induttanze ideali come indicato nella figura che segue.

*Induttanza fluttuante*



È possibile, con giuste sostituzioni, realizzare, a questo punto, circuiti che abbiano impedenza di ingresso proporzionale a  $p^2$ . Ricordando che  $p \equiv j\omega$  e che quindi  $p^2 = -\omega^2$ , potremo avere dispositivi con impedenza puramente reale e proporzionale a  $-\omega^2$ . Se l'impedenza è puramente reale, allora presenterà un comportamento resistivo negativo. Questi circuiti sono stati, da Bruton, denominati "FDNR", acronimo di Frequency Dependent Negative Resistance, ovvero di resistenze negative dipendenti dalla frequenza. Si ottengono così FDNR detti di tipo D o di tipo E a seconda che siano proporzionali rispettivamente a  $1/p^2$  o a  $p^2$ . Nel primo caso otterremo dei "Supercondensatori", mentre nel secondo caso avremo dei "Superinduttori". È banale, sostituendo nell'equazione già calcolata

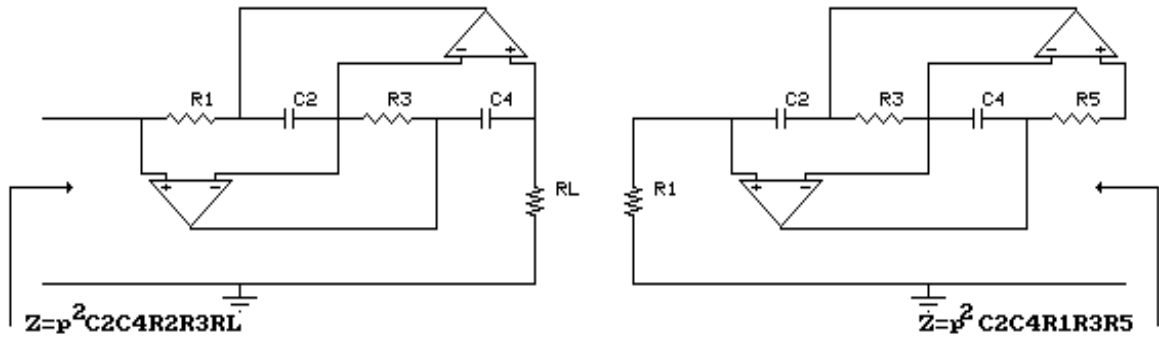
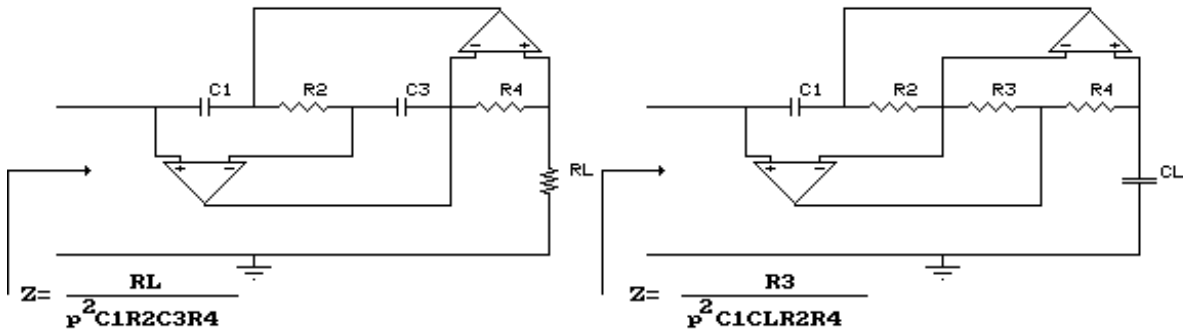
$$Z_{ing} = \frac{Y_3 Y_5}{Y_2 Y_4} \cdot Z_L$$

al posto delle ammettenze indicizzate le reali ammettenze dei componenti circuitali,

dimostrare che, nei supercondensatori,  $Y(p)$  sarà proporzionale a  $p^2$  e, nei super induttori, sarà  $Z(p)$  ad essere proporzionale a  $p^2$ . La costante di proporzionalità sarà un numero sempre positivo che prende il nome di "D" nel caso dei supercondensatori e di "E" nell'altro caso. D ha le dimensioni di Farad per Secondo, mentre E si misura in Henry per Secondo, come per altro, è facile dimostrare.

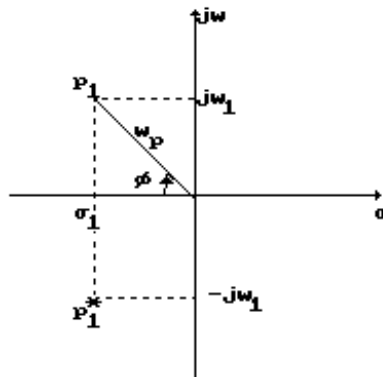
I circuiti che si ottengono sono rappresentati nelle figure seguenti:

**FDNR di tipo D - Supercondensatore**



**FDNR di tipo E - Superinduttore**

Entriamo ora nell'analisi più dettagliata dei filtri attivi. In questo capitolo, ci soffermeremo soprattutto sui filtri del secondo ordine, ovvero su filtri che hanno a denominatore un polinomio di secondo grado nella forma:  $p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2$ , in cui  $\omega_p^2$  è il *modulo dei poli complessi*, mentre  $q_p$  è il *fattore di qualità del filtro*, pari all'inverso del *fattore di smorzamento*  $\delta$ . Vale la pena di puntualizzare brevemente il significato fisico di  $\omega$  e di  $q$ . Risolvendo l'equazione sopra riportata, risulterà evidente la comparsa di una coppia di poli, non necessariamente puramente reali, ma complessi coniugati. La distribuzione dei poli sul piano gaussiano sarà quindi, genericamente, quella riportata in figura:



Sia quindi  $p_1 \equiv \sigma_1 + j\omega_1$  e  $p_1^* \equiv \sigma_1 - j\omega_1$  con  $\sigma_1$  reale e  $\omega_1$  reale e positivo. A questo punto,  $q_p$  e  $\omega_p$  sono così definiti:

$$q_p \equiv -\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}}{2\sigma_1} e$$

$$\omega_p \equiv \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2}$$

da cui è facile dedurre che  $q_p = -\frac{\omega_p}{2\sigma_1}$

È evidente osservare che  $\omega_p$  è il modulo dei poli complessi, mentre  $q_p$  risulta essere pari a  $q_p = -\frac{1}{2\cos\phi}$ . Si può, così, notare come il  $q$  cresca da 0.5, quando le radici sono reali, fino a tendere a  $\infty$  se le radici sono puramente immaginarie.

Il polinomio di secondo grado che genera una simile coppia di poli sarà:

$$p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2$$

ed il generico polinomio non monico di secondo grado

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0$$

avrà  $q_p = \frac{\sqrt{a_0 a_2}}{a_1}$  ed  $\omega_p = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$

Volendo chiamare  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le radici reali negative del trinomio monico, lo stesso acquisterà la forma  $p^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)p + \sigma_1 \sigma_2$ . In questo caso  $q_p = \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\sigma_1 + \sigma_2}$  ed  $\omega_p = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$

## FUNZIONI ELEMENTARI DI SECONDO GRADO

Come abbiamo avuto modo di vedere all'inizio del capitolo, esistono cinque classi fondamentali di filtro. A queste classi corrispondono almeno altrettante funzioni di trasferimento in tensione dei filtri stessi. In questa rapida trattazione ci occuperemo solo di funzioni di secondo grado, che conducono ad avere filtri con due poli e con un numero di zeri massimo pari, evidentemente, a due. La funzione più generale in grado di dar luogo, come vedremo, a tutte le celle elementari di filtro, è la *funzione bi-quadratica* che ha espressione del tipo:

$$H_p = K \cdot \frac{p^2 + \frac{\omega_z}{q_z} p + \omega_z^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} p + \omega_p^2}$$

Il modulo di questa funzione, ricordando che  $p \equiv j\omega$ , sarà:

$$|H_p| = K \cdot \frac{\sqrt{(\omega_z^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \cdot \frac{\omega_z}{q_z}\right)^2}}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \cdot \frac{\omega_p}{q_p}\right)^2}}$$

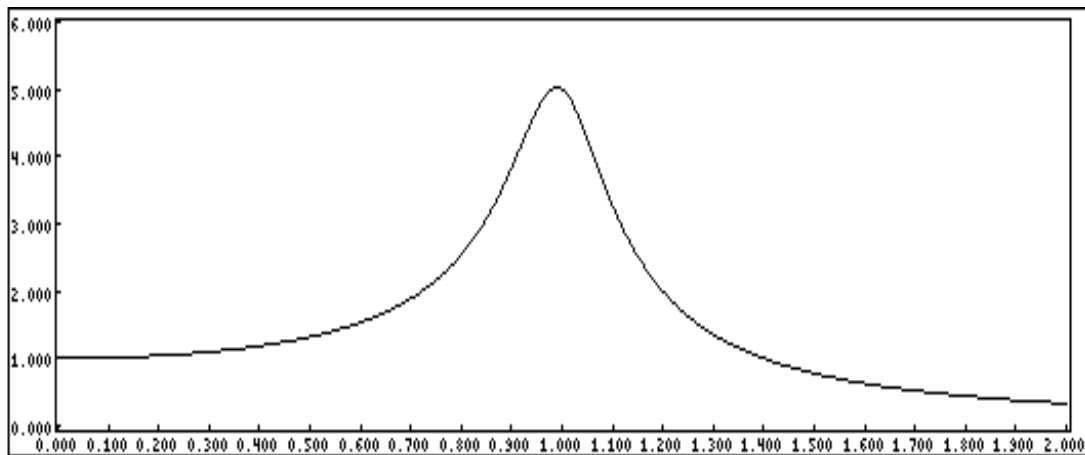
ed il suo argomento

$$\text{Arg}\langle H(p) \rangle = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\left( \omega_p^2 - \omega^2 \right) \cdot \left( \omega \cdot \frac{\omega_z}{q_z} \right) - \left( \omega \cdot \frac{\omega_p}{q_p} \right) \cdot \left( \omega_z^2 - \omega^2 \right)}{\left( \omega_p^2 - \omega^2 \right) \cdot \left( \omega_z^2 - \omega^2 \right) + \left( \omega \cdot \frac{\omega_p}{q_p} \right) \cdot \left( \omega \cdot \frac{\omega_z}{q_z} \right)} \right]$$

É particolarmente semplice pensare come, al variare del numeratore, sia possibile realizzare tutti i tipi elementari di filtro di secondo ordine. Infatti un **Filtro Passa Basso (Low Pass Filter)** del secondo ordine, avrà funzione di trasferimento pari a :

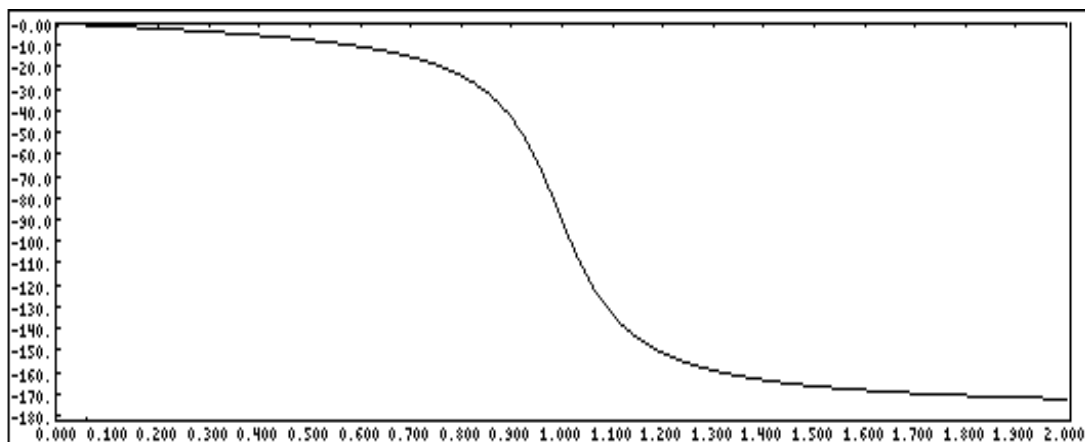
$$H(p) = K \cdot \frac{1}{p^2 + \left( \frac{\omega_p}{q_p} \right) \cdot p + \omega_p^2}$$

tracciando i diagrammi del suo modulo e della sua fase risulta chiara la denominazione di questa funzione, che nel prosieguo verrà indicata come *LP*, infatti:



*Andamento del modulo della funzione passa-basso (K=1, ω<sub>p</sub>=1, q<sub>p</sub>=5)*

e lo studio della sua fase produrrà il seguente grafico:

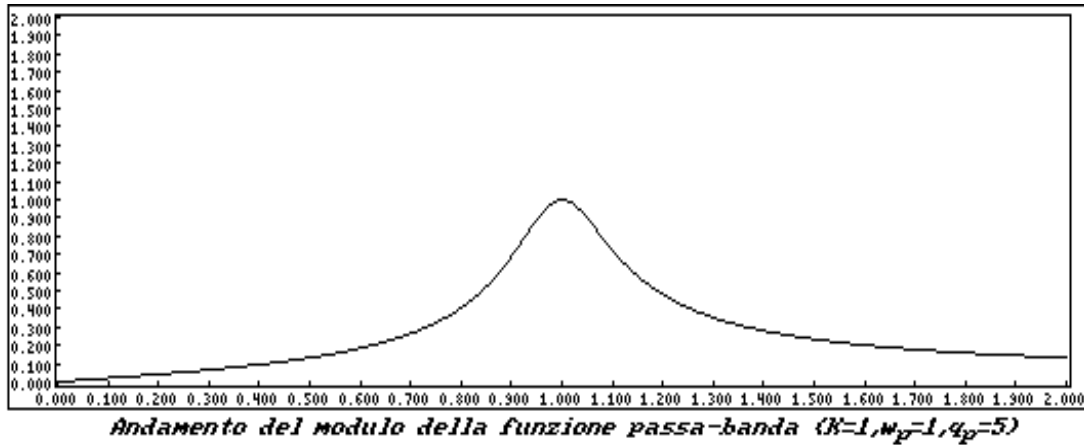


*Andamento della fase della funzione passa-basso (K=1, ω<sub>p</sub>=1, q<sub>p</sub>=5)*

La funzione **Passa Banda** dovrà presentare uno zero nell'origine. Sarà quindi del tipo:

$$H(p) = K \cdot \frac{\left(\frac{\omega_p}{q_p}\right) \cdot p}{p^2 + \left(\frac{\omega_p}{q_p}\right) \cdot p + \omega_p^2}$$

Anche per questa funzione tracciamo i grafici relativi al suo modulo ed alla sua fase:



È facile riconoscere un massimo che cade per  $\omega_M \equiv \omega_p$  il cui valore, in ordinata, risulta pari a  $H_M = |H(j\omega)| = K$

Definendo  $\omega_1$  ed  $\omega_2$  le frequenze di taglio, per le quali il modulo si riduce di  $\sqrt{2}$  (3dB), è possibile costruirsi un importante risultato per  $q_p$ . Infatti:

$$\omega_1 = \omega_p \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4q_p^2}} - \frac{\omega_p}{2q_p}$$

ed

$$\omega_2 = \omega_p \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4q_p^2}} + \frac{\omega_p}{2q_p}$$

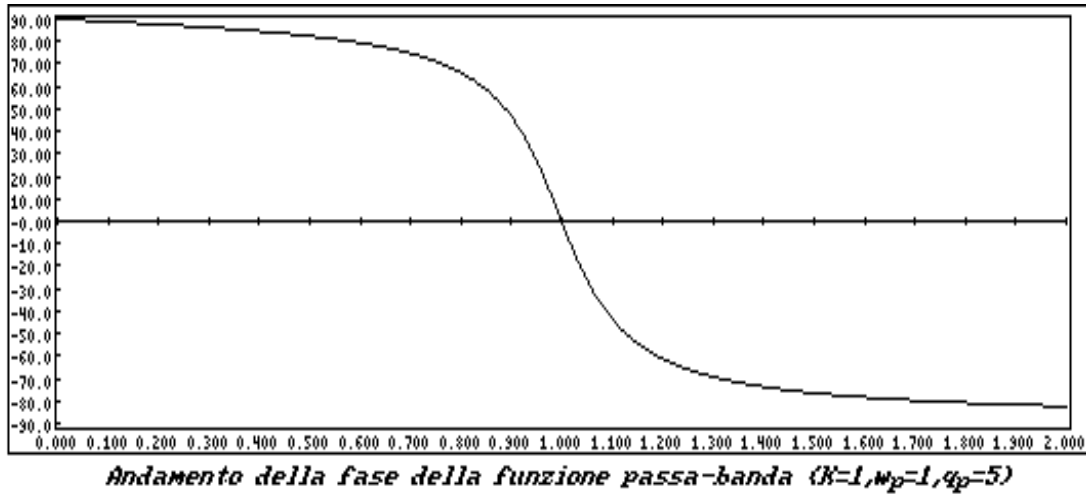
ricavando  $q_p$  da queste due si ottiene:

$$\frac{\omega_M}{\omega_2 - \omega_1} = q_p$$

Da questa relazione si evince che il Q dei poli risulta essere *il rapporto fra la pulsazione (frequenza) di risonanza  $\omega_M$ , che, per altro, è coincidente con  $\omega_p$  e la banda passante del filtro.*

Tracciamo ora il diagramma della fase della funzione passa banda:

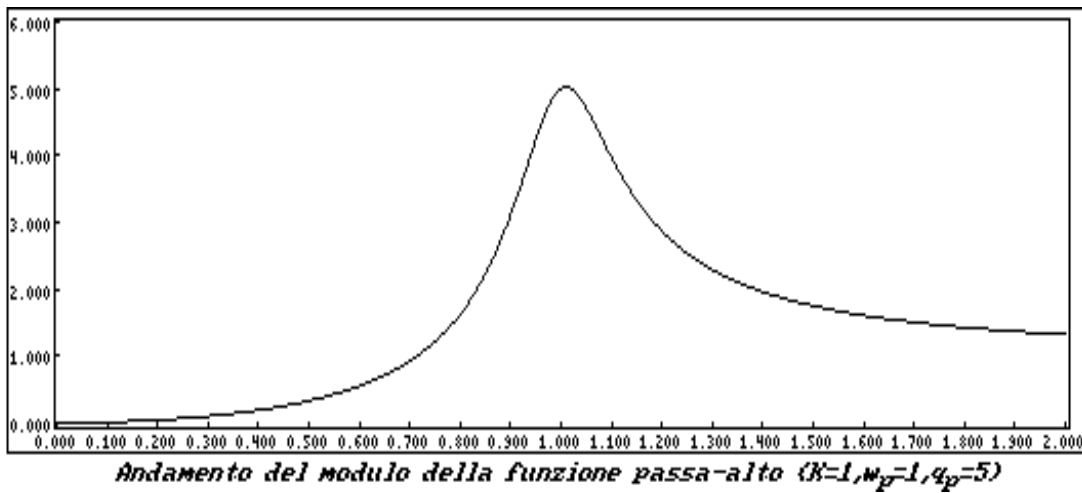




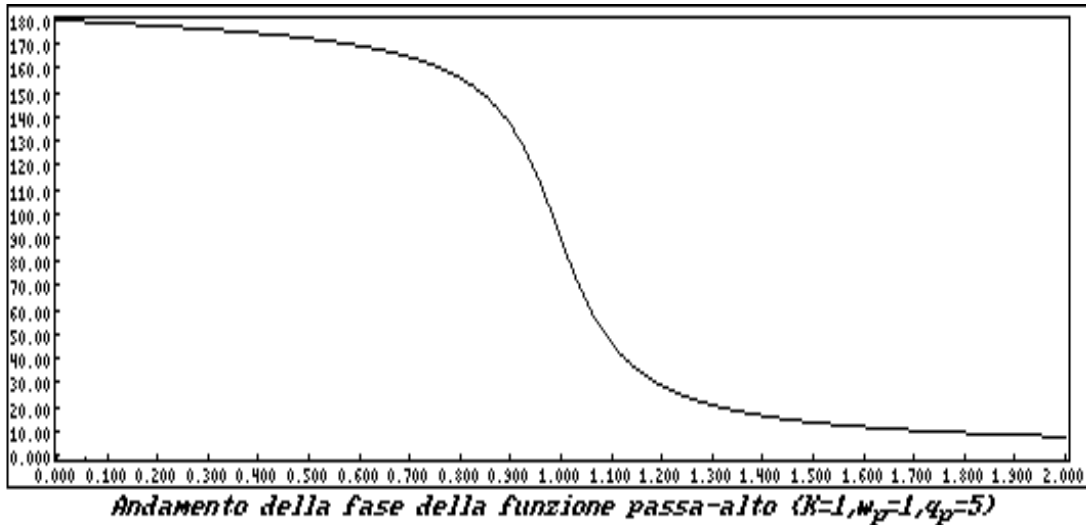
L'ultima funzione di questo tipo che dobbiamo considerare è la funzione **Passa Alto**, di seguito indicata con *HP*. Essa presenterà due zeri nell'origine e sarà, pertanto:

$$H(p) = K \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2}$$

Tracciamone i soliti grafici.  
Il Diagramma del modulo sarà:



e quello della fase risulterà essere:



Un'altra importante categoria di filtri sono quelli aventi funzione di trasferimento con zeri di trasmissione finiti, o *filtri di notch*. In inglese il termine "notch" ha il significato di "incavo a V" e pertanto, generalmente, si associa la definizione di "filtri di notch" solo ai filtri a reiezione di banda. In realtà, una definizione più rigorosa attribuisce il termine "notch" anche alle funzioni passa basso e passa alto aventi le caratteristiche che andremo ad illustrare.

La generica funzione con zeri di trasmissione finiti è del tipo:

$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 + \omega_z^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2}$$

Chiaramente, potremo avere tre distinti casi:

1)  $\omega_z > \omega_p$ :

É il caso di una funzione di tipo **Passa Basso** con una coppia di zeri di trasmissione immaginari. Prende il nome di **Lowpass notch (LPN)**

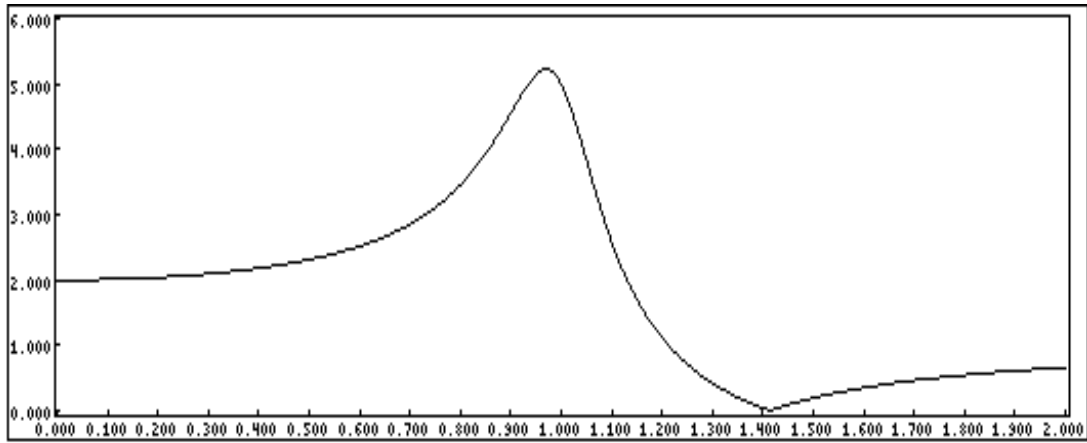
2)  $\omega_z = \omega_p$ :

In questo caso ho un minimo pari a 0 in  $\omega_z \equiv \omega_p$  ed è pertanto una funzione elimina banda o a **Reiezione di Banda (Band Rejection) (BR)**

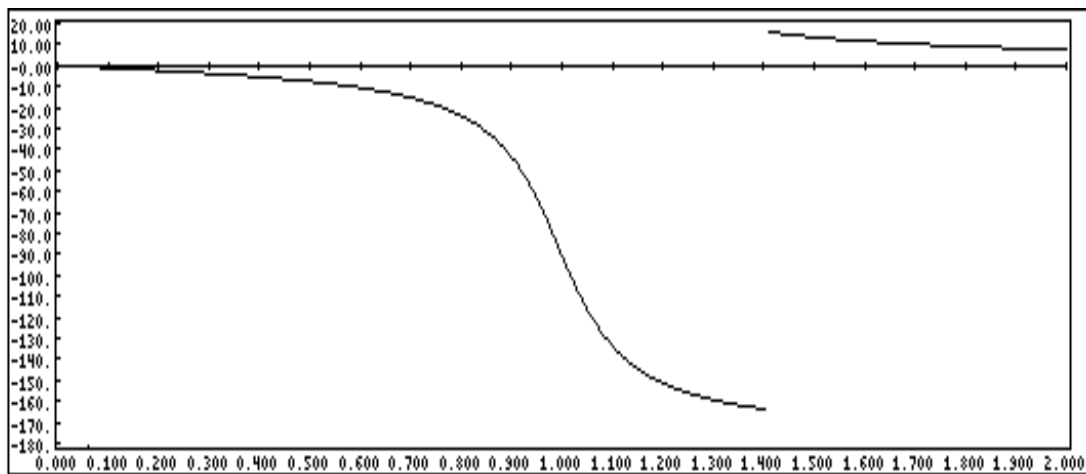
3)  $\omega_z < \omega_p$

La funzione è ora di tipo **Passa Alto** con zeri di trasmissione puramente immaginari. Prende il nome di **Highpass Notch (HPN)**

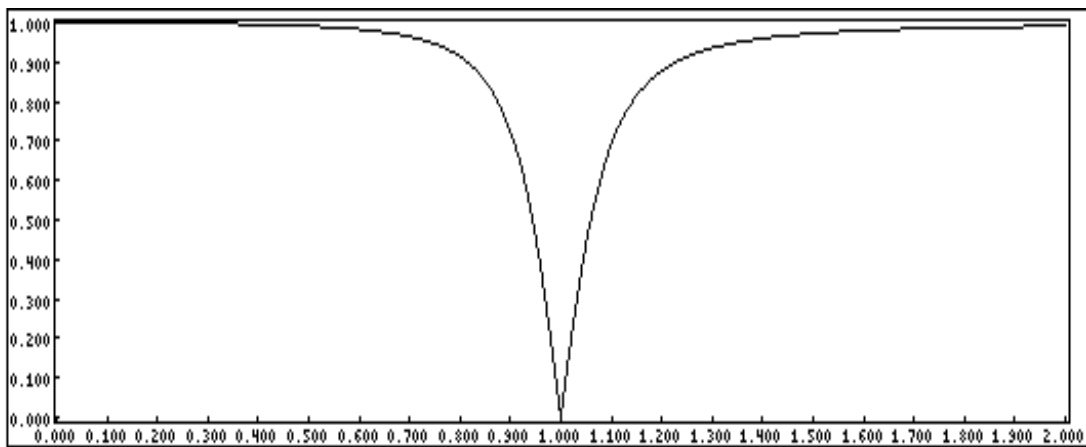
I grafici relativi sono di seguito riportati.



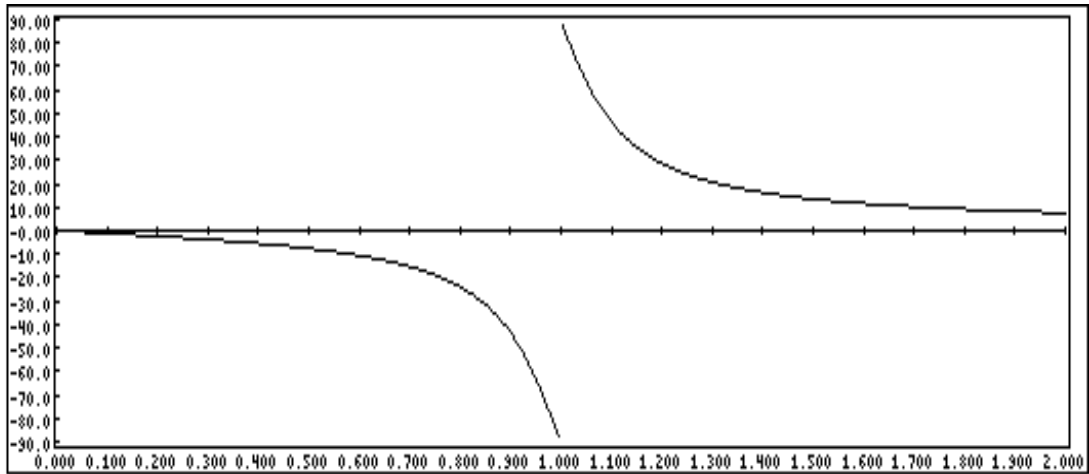
*Andamento del modulo della funzione LPN ( $K=1, m_z=\sqrt{2}, m_p=1, q_p=5$ )*



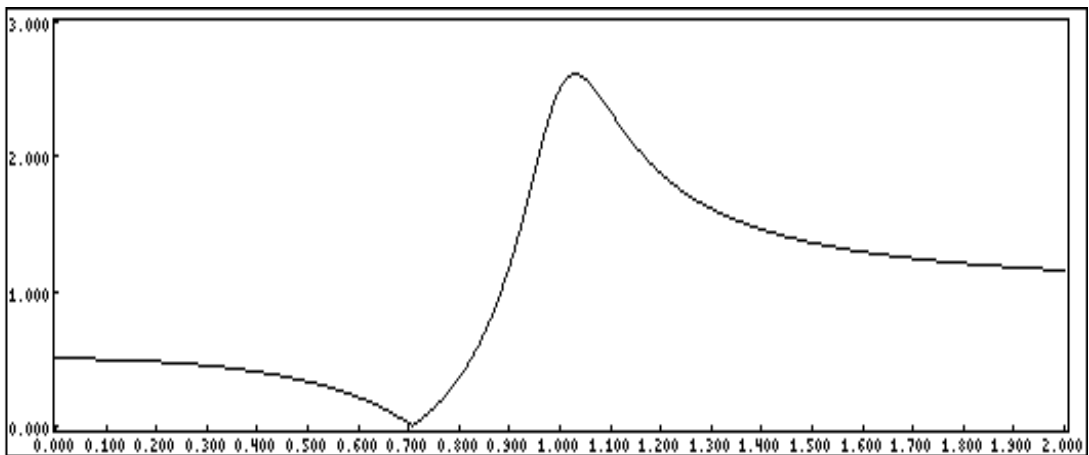
*Andamento della fase della funzione LPN ( $K=1, m_z=\sqrt{2}, m_p=1, q_p=5$ )*



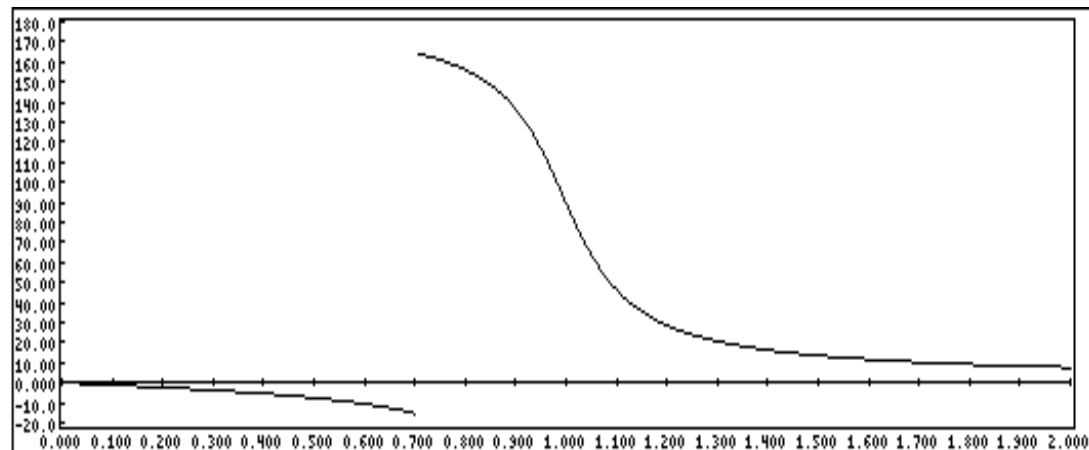
*Andamento del modulo della funzione BRN ( $K=1, m_z=m_p=1, q_p=5$ )*



*Andamento della fase della funzione BRN ( $K=1, w_z=w_p=1, q_p=5$ )*



*Andamento del modulo della funzione HPM ( $K=1, w_z=1/\sqrt{2}, w_p=1, q_p=5$ )*



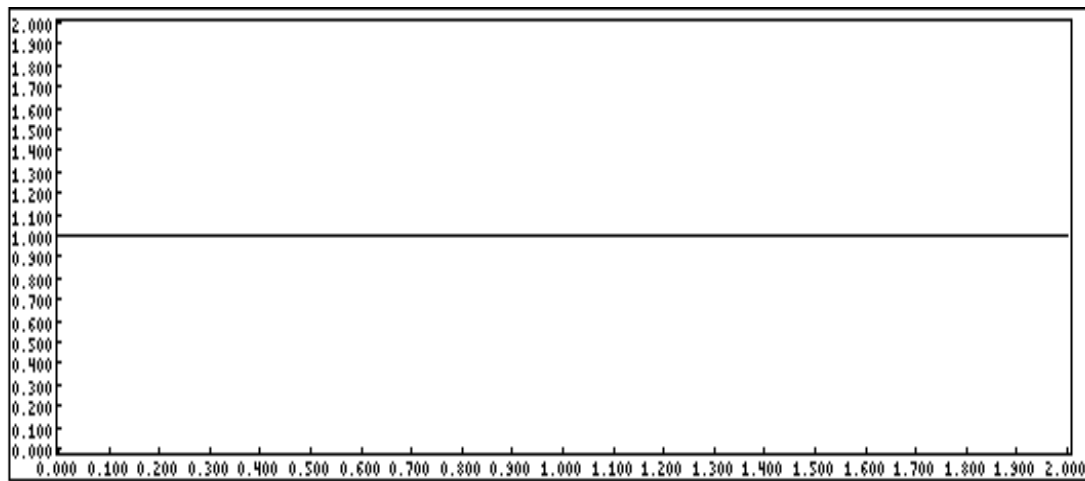
*Andamento della fase della funzione HPM ( $K=1, w_z=1/\sqrt{2}, w_p=1, q_p=5$ )*

L'ultima funzione che prenderemo in esame, è la funzione Passa Tutto, o **All Pass (AP)**.  
 Presenta una funzione del tipo:

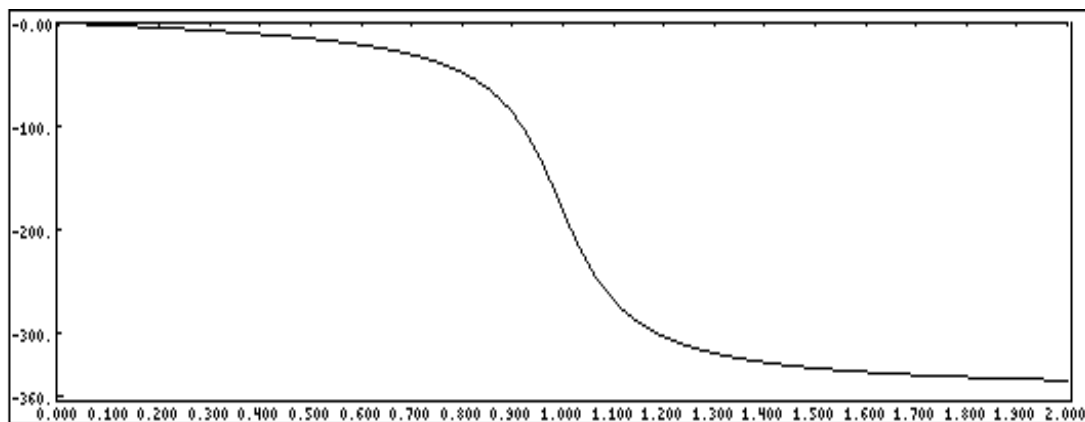
$$H(p) = K \cdot \frac{p^2 - \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2}{p^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot p + \omega_p^2}$$

Il suo modulo è costante al variare della frequenza e vale K, mentre la fase passa da 0° in continua a -360° per frequenza infinite. Lo sfasamento di -180° cade in  $\omega = \omega_p$ . È quindi un tipico filtro sfasatore.

I diagrammi relativi sono riportati nelle seguenti illustrazioni:



*Andamento del modulo della funzione AP (K=1,  $\omega_p=1$ ,  $q_p=5$ )*



*Andamento della fase della funzione AP (K=1,  $\omega_p=1$ ,  $q_p=5$ )*

Potrebbe essere un buon esercizio, e lo si lascia al lettore, il computo del modulo e della fase delle varie funzioni, come dei loro massimi e minimi. Come suggerimento, si consiglia di dividere il parte pari e parte dispari il numeratore ed il denominatore della funzione di trasferimento, seguendo quanto di seguito indicato.

sia:

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

e siano:

$$N_r \equiv b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \dots$$

$$N_i \equiv b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - b_7\omega^7 + \dots$$

$$D_r \equiv a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots$$

$$D_i \equiv a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - a_7\omega^7 + \dots$$

Risulta:

$$\Re\{H(j\omega)\} = \frac{D_r N_r + D_i N_i}{D_r^2 + D_i^2}$$

$$\Im\{H(j\omega)\} = \frac{D_r N_i - D_i N_r}{D_r^2 + D_i^2}$$

È facile, a questo punto, ricavare il modulo e la fase (argomento o anomalia, come più correttamente indicano i matematici)

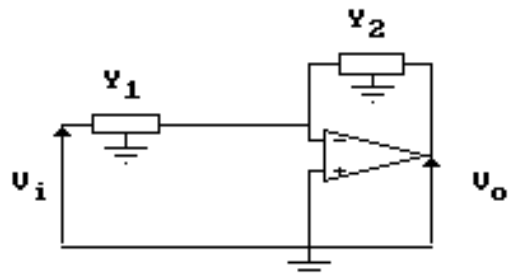
$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{N_r^2 + N_i^2}{D_r^2 + D_i^2}}$$

$$\text{Arg}\langle H(j\omega) \rangle = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{D_r N_i - D_i N_r}{D_r N_r + D_i N_i} \right\}$$

Abbiamo così terminato l'esame delle principali funzioni di secondo ordine. Non resta, ora, che vedere come possano essere realizzate circuitalmente.

## FILTRI ATTIVI DEL SECONDO ORDINE

Supponiamo di voler realizzare un filtro attivo del secondo ordine di qualsiasi tipo. Scegliamo un amplificatore operazionale come elemento attivo, dato che, presentando guadagno pressochè infinito, la funzione di trasferimento del circuito dipende praticamente solo dalla reazione, e ci orienteremo su un circuito del tipo di quello riportato in figura, considerando che è il circuito più semplice che ci possa venire in mente.



*Tipico amplificatore invertente*

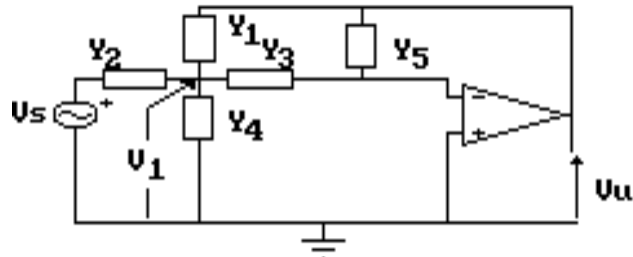
È banale calcolare la funzione di trasferimento del circuito, ricordando che con  $Y$  vengono indicate le *ammettenze* (inverso delle impedenze). Essa sarà semplicemente:

$$\frac{V_u}{V_i} = -\frac{Y_1}{Y_2}$$

in cui  $Y_1$  ed  $Y_2$  sono le ammettenze di generici doppi bipoli RC comunque costituiti.

Procedendo alla sintesi del filtro, ci accorgeremmo che non solo saremmo chiamati a risolvere calcoli talvolta piuttosto complessi, ma giungeremmo alla realizzazione di reti comprendenti un numero spesso ridondante di componenti.

Si preferisce, così, ricorrere a strutture a reazioni multiple, come quella di seguito indicata:



*Forma generale dei filtri a reazioni multiple*

Calcoliamo la funzione di trasferimento di questo circuito.

Nel seguito denomineremo  $I_i$  la corrente che circola nella generica ammettenza  $Y_i$ . Ricordando che l'amplificatore operazionale è, in questo primo caso, considerato *ideale* e che, pertanto, ai suoi morsetti di ingresso non vi è caduta di tensione, considerando quindi il morsetto invertente come massa virtuale, potremo dire che  $I_5 = V_u \cdot Y_5 \equiv I_3$ ; questa corrente, non potendo entrare nell'operazionale, genera una caduta di tensione su  $Y_3$  pari a  $\frac{V_u Y_5}{Y_3}$ . Questa tensione è uguale ed opposta a quella che cade su  $Y_4$ . La corrente uscente dal nodo nel quale confluiscono  $Y_1, Y_2, Y_3$  ed  $Y_4$  e circolante in  $Y_4$  sarà quindi  $I_4 = V_1 Y_4 = -\frac{V_u Y_5 Y_4}{Y_3}$ , avendo definito con  $V_1$  la tensione fra quel nodo e massa. La corrente  $I_1$  sarà pari a  $I_1 = (V_u - V_1) \cdot Y_1 = V_u Y_1 + \frac{V_u Y_5 Y_1}{Y_3}$  ed  $I_2 = (V_s - V_1) \cdot Y_2 = V_s Y_2 + \frac{V_u Y_5 Y_2}{Y_3}$ . Dobbiamo a questo punto risolvere l'equazione al nodo  $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$ . Pertanto:

$$V_s Y_2 = -V_u \left[ \frac{Y_5 Y_2}{Y_3} + Y_1 + \frac{Y_5 Y_1}{Y_3} + Y_5 + \frac{Y_5 Y_4}{Y_3} \right]$$

$$\frac{V_u}{V_s} = -\frac{Y_2 Y_3}{Y_2 Y_5 + Y_1 Y_3 + Y_1 Y_5 + Y_3 Y_5 + Y_4 Y_5}$$

ovvero

$$\frac{V_u}{V_s} = -\frac{Y_2 Y_3}{Y_5 \cdot \sum_{i=1}^4 Y_i + Y_1 Y_3}$$

Se l'amplificatore operazionale, anzichè presentare guadagno infinito (essere, cioè, ideale) presentasse guadagno  $\mu$ , il potenziale del morsetto invertente non sarebbe più a potenziale di massa, ma si troverebbe ad una tensione pari a  $-\frac{V_u}{\mu}$  pertanto le equazioni diventerebbero:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4$$

$$I_5 = \left(\frac{V_u}{\mu}\right) \cdot Y_5$$

$$I_3 \equiv I_5$$

$$V_1 = \frac{V_u}{\mu} - \left(V_u - \frac{V_u}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{Y_5}{Y_3}\right)$$

$$I_4 = -\frac{V_u}{\mu} \cdot Y_4 - \frac{V_u Y_4 Y_5}{Y_3} - \frac{V_u}{\mu} \cdot \frac{Y_5 Y_4}{Y_3}$$

$$I_1 = V_u Y_1 + \frac{V_u}{\mu} \cdot Y_1 + \frac{V_u Y_1 Y_5}{Y_3} + \frac{V_u}{\mu} \cdot \frac{Y_1 Y_5}{Y_3}$$

$$I_2 = V_s Y_2 + \frac{V_u}{\mu} \cdot Y_2 + \frac{V_u Y_2 Y_5}{Y_3} + \frac{V_u}{\mu} \cdot \frac{Y_2 Y_5}{Y_3}$$

mettendo a sistema le equazioni I, III, IV, V, VI e svolgendo i calcoli si giunge alla funzione di trasferimento:

$$\frac{V_u}{V_s} = - \frac{\mu \cdot Y_2 Y_3}{Y_5 \cdot \sum_{i=1}^4 Y_i + Y_3 \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_4) + \mu \cdot \left( Y_5 \cdot \sum_{i=1}^4 Y_i + Y_1 Y_3 \right)}$$

A questo punto, conoscendo i vari tipi di funzione del secondo ordine e la funzione di trasferimento generale della rete a reazioni multiple, è possibile, sostituendo alle ammettenze  $Y_i$  o resistenze o capacità, ottenere qualsiasi di filtro, in questo caso, *invertente*. Vediamo i vari casi:

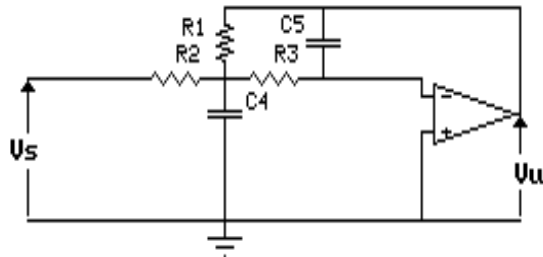
### FILTRO PASSA BASSO

La funzione passa basso non presenta zeri, pertanto  $Y_2$  ed  $Y_3$  saranno resistenze.

Dovendo a questo punto realizzare una coppia di poli, non potremo fare altro che porre  $Y_5$  ed  $Y_4$  capacità ed  $Y_1$  resistenza. Infatti se  $Y_1$  fosse una capacità e le altre resistenze, otterrei una funzione di primo ordine, dovrei necessariamente avere anche  $Y_5$  come capacità per ottenere il termine di secondo grado, ma, così facendo, perderei il termine noto. Quindi la scelta è obbligata. Inoltre, basti pensare che, in un filtro passa basso, la continua deve poter passare, pertanto siamo strettamente vincolati sullo scegliere  $Y_2$  ed  $Y_3$  come resistenze, in quanto se almeno una fosse un condensatore, questo si comporterebbe come condensatore di blocco.

Il circuito che si ottiene è il seguente:





***Filtro Passa Basso invertente a reazioni multiple***

La funzione di trasferimento di questo filtro può essere ottenuta o per via diretta dal circuito o, più semplicemente, sostituendo al posto delle  $Y_i$  i valori delle ammettenze proprie, quindi avremo:

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}; Y_2 = \frac{1}{R_2}; Y_3 = \frac{1}{R_3}; Y_4 = pC_4; Y_5 = pC_5$$

Si otterrà:

$$\frac{V_u(p)}{V_s(p)} = - \frac{1}{R_2 R_3 C_4 C_5} \frac{1}{p^2 + p \cdot \frac{1}{C_4} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{R_1 R_3 C_4 C_5}}$$

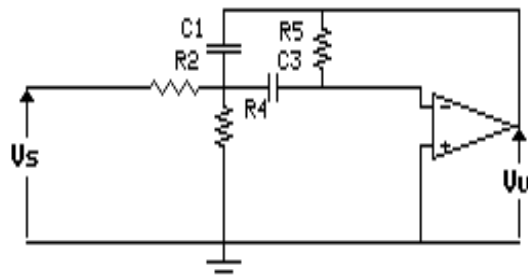
Il guadagno  $K = \frac{R_1}{R_2}$

La pulsazione  $\omega_p = \sqrt{\frac{1}{R_1 R_3 C_4 C_5}}$

Il termine  $\frac{1}{q_p} = \sqrt{\frac{C_5}{C_4} \cdot \left( \sqrt{\frac{R_3}{R_1}} + \sqrt{\frac{R_1}{R_3}} + \frac{R_1 R_3}{R_2} \right)}$

Si lascia la verifica al Lettore.

Il filtro Passa Banda presenta diverse soluzioni circuitali. Fra tutte se ne analizza una delle più pratiche:



***Filtro Passa Banda invertente a reazioni multiple***

La funzione di trasferimento sarà:

$$\frac{V_u(p)}{V_s(p)} = - \frac{\frac{p}{R_2 C_1}}{p^2 + p \cdot \frac{1}{R_5} \cdot \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_1} \right) + \frac{1}{R_5 C_3 C_1} \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right)}$$

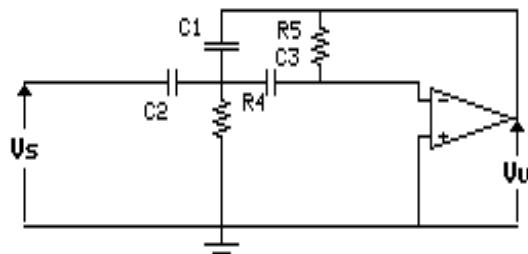
Il guadagno  $K = \frac{1}{\frac{R_2}{R_5} \cdot \left( 1 + \frac{C_1}{C_3} \right)}$

La pulsazione  $\omega_p = \frac{1}{R_5 C_3 C_1} \cdot \sqrt{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}}$

Il termine  $\frac{1}{q_p} = \sqrt{R_5 \cdot \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right)} \cdot \left( \sqrt{\frac{C_3}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} \right)$

É sottinteso che gli stessi ragionamenti fatti per ricavare il filtro Passa Basso, sono validi anche per il Passa Banda e per il prossimo filtro che vedremo: il Passa Alto.

Il filtro Passa Alto a reazioni multiple invertente viene realizzato seguendo lo schema appresso riportato:



**Filtro Passa Alto invertente a reazioni multiple**

Anche per questo filtro si danno le relazioni caratteristiche:

$$\frac{V_u(p)}{V_s(p)} = - \frac{\frac{C_2}{C_1} p^2}{p^2 + p \cdot \frac{1}{R_5} \cdot \left( \frac{C_2}{C_3 C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{1}{R_4 R_5 C_1 C_3}}$$

Il guadagno  $K = \frac{C_2}{C_1}$

La pulsazione  $\omega_p = \sqrt{\frac{1}{R_4 R_5 C_1 C_3}}$

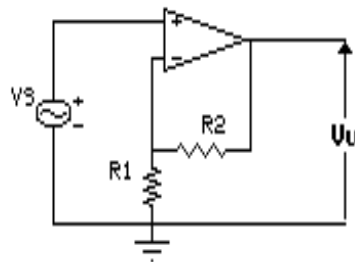
Il termine  $\frac{1}{q_p} = \frac{R_4}{R_5} \cdot \left( \frac{C_2}{\sqrt{C_3 C_4}} + \sqrt{\frac{C_3}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} \right)$

Quella presentata è solo la più generale rassegna di filtri invertenti a reazioni multiple. Altri filtri del secondo ordine potranno essere progettati seguendo i normali dettami della teoria delle reti elettriche.

Per fare un bilancio delle configurazioni sin qui viste, dobbiamo notare che un grande vantaggio di questo tipo di filtri, è quello di presentare impedenza di uscita decisamente bassa, ciò vuol dire che questi filtri possono essere posti come stadi piloti di altri circuiti, ottenendo così un fattore di inserzione trascurabile. Un grosso svantaggio, invece, è rappresentato dal fatto che non è possibile ottenere alti valori di  $Q$ , e quindi alte selettività, senza dover ricorrere ad elementi passivi di valore compreso all'interno di un grande campo. La realizzazione di filtri a reazioni multiple con circuiti a reazione positiva, può superare tali limitazioni.

## CIRCUITI A SORGENTE CONTROLLATA

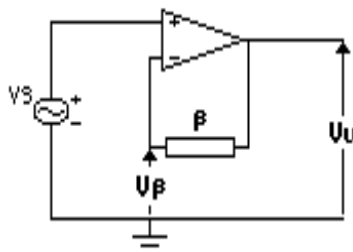
Consideriamo, preliminarmente, il ben noto amplificatore di tensione non invertente:



La sua funzione di trasferimento è:

$$\frac{V_u}{V_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Questo circuito può essere considerato come un insieme unico di amplificatore reazionato, in cui la rete  $\beta$  di reazione è costituita dal partitore fra  $R_1$  ed  $R_2$ .



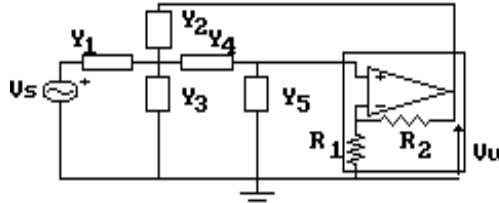
Se chiamiamo  $V_\beta$  la tensione ai capi di  $R_1$ , il fattore di reazione  $\frac{V_\beta}{V_u}$  sarà dato da:

$$\beta \equiv \frac{V_\beta}{V_u} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Chiamando ora  $\mu$  il guadagno dell'amplificatore retroazionato ed  $A$  l'amplificazione dell'amplificatore operazionale, potremo dire che  $\mu = \frac{A}{1 + A\beta}$  e quindi  $\mu = \frac{A(R_1 + R_2)}{R_1(1 + A) + R_2}$

Nel caso in cui  $A = \infty$  la formula si riduce a  $\mu = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$  uguale, per altro, a quella già vista.

Consideriamo una struttura del come quella rappresentata in figura.



*Forma generale dei filtri UCVS*

Calcoliamo, anche in questo caso, la sua funzione di trasferimento, tenendo conto di quanto detto in precedenza, ovvero che, supponendo l'operazionale ideale, sarà possibile dire che il guadagno della parte racchiusa nel riquadro sia pari a  $\mu = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ . Pertanto si terrà conto di ciò nei nostri calcoli, tenendo presente che la tensione di uscita sarà pari a  $\mu$  volte la tensione presente sul morsetto non invertente dell'operazionale.

Procedendo come di consueto, calcoliamoci la funzione di trasferimento  $\frac{V_u(p)}{V_s(p)}$ .

$I_5 = I_4 = \frac{V_u Y_5}{\mu}$ ; la tensione ai capi di  $Y_3$ , chiamata  $V_3$  sarà:

$$V_3 = \frac{V_u}{\mu} + \frac{V_u}{\mu} \cdot \frac{Y_5}{Y_4}; \text{ quindi } I_3 = \frac{V_u Y_3}{\mu} + \frac{V_u}{\mu} \cdot \frac{Y_5 Y_3}{Y_4}$$

$$I_2 = V_u Y_2 - \frac{V_u}{\mu} Y_2 - \frac{V_u Y_5 Y_2}{\mu Y_4}$$

ed infine

$$I_1 = V_s Y_1 - \frac{V_u Y_1}{\mu} - \frac{V_u Y_1 Y_5}{\mu Y_4}$$

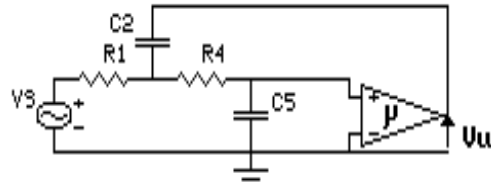
scrivendo l'equazione al nodo  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$  e sostituendo, otteniamo:

$$\frac{V_u(p)}{V_s(p)} = \frac{\mu Y_1 Y_4}{Y_5 \sum_{i=1}^4 Y_i + Y_4 [Y_1 + Y_2 (1 - \mu) + Y_3]}$$

In questo paragrafo, ricaveremo lo schema dei vari filtri (LP, BP, HP) che realizzano le relative funzioni. Sono possibili più soluzioni circuitali che implementino i diversi tipi di filtri, come, per altro, il Lettore potrà facilmente verificare, sia invertenti che non invertenti, ma noi analizzeremo solo le configurazioni proposte da *Sallen e Key*. Per inciso, questi circuiti prendono normalmente il nome di *VCVS*, acronimo di *Voltage Controlled Voltage Source* (Sorgente di Tensione Controllata in Tensione).

Iniziamo così col vedere il filtro **Passa Basso**; va da sè che il ragionamento che conduce alla realizzazione dei filtri è lo stesso visto per i circuiti a reazioni multiple.

Il filtro Passa Basso non invertente VCVS di Sallen & Key è realizzato secondo il seguente schema circuitale:



**Filtro VCVS Passa Basso**

La funzione di trasmissione di questo filtro sarà:

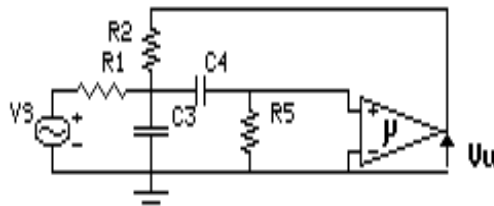
$$\frac{V_u}{V_s}(p) = \frac{\mu}{R_1 R_4 C_2 C_5} \frac{1}{p^2 + p \left( \frac{1}{R_1 C_2} + \frac{1}{R_4 C_2} + \frac{(1-\mu)}{R_4 C_5} \right) + \frac{1}{R_1 R_4 C_2 C_5}}$$

Il guadagno  $K = \mu$

La pulsazione  $\omega_p = \frac{1}{R_1 R_4 C_2 C_5}$

ed il fattore  $\frac{1}{q_p} = \sqrt{\frac{R_4 C_5}{R_1 C_2}} + \sqrt{\frac{R_1 C_5}{R_4 C_2}} + \sqrt{\frac{R_1 C_2}{R_4 C_5}} (1-\mu)$

La configurazione di Sallen & Key del filtro Passa Banda VCVS non invertente è la seguente:



**Filtro VCVS Passa Banda**

La funzione di trasmissione di questo filtro sarà:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = \frac{\mu p}{R_1 C_3} \frac{1}{p^2 + p \cdot \frac{C_4 R_5 [R_2 + R_1 (1-\mu)] + R_1 R_2 (C_3 + C_4)}{R_1 R_2 C_3 C_4 R_5} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_3 C_4 R_5}}$$

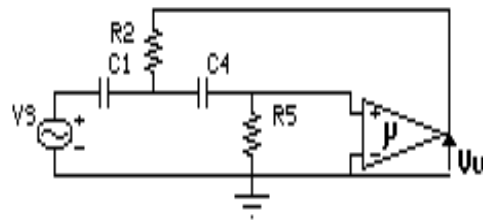
Il guadagno

$$K = \frac{\mu \sqrt{\frac{R_2 C_4 C_5}{R_1 C_3}}}{C_4 R_5 [R_2 + R_1 (1 - \mu)] + R_1 R_2 (C_3 + C_4)}$$

La pulsazione  $\omega_p = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_5 C_3 C_4}}$

ed il fattore  $\frac{1}{q_p} = \frac{C_4 R_5 (R_1 + R_2) - \mu C_4 R_1 R_5 + R_1 R_2 (C_3 + C_4)}{\sqrt{(R_1 + R_2) \cdot R_1 R_2 R_5 C_3 C_4}}$

Il filtro Passa Alto di Sallen & Key non invertente è:



*Filtro VCVS Passa Alto*

Anche di questo filtro si forniscono i parametri di rete caratteristici:

La funzione di trasmissione è:

$$\frac{V_u}{V_s}(p) = \frac{\mu p^2}{p^2 + p \left[ \frac{1}{R_5 C_1} + \frac{1}{R_4 C_4} + \frac{(1 - \mu)}{R_2 C_1} \right] + \frac{1}{R_2 R_5 C_1 C_4}}$$

Il guadagno  $K = \mu$

La pulsazione  $\omega_p = \sqrt{\frac{1}{R_2 R_5 C_1 C_4}}$

ed il fattore  $\frac{1}{q} = \sqrt{\frac{R_2 C_1}{R_5 C_4}} + \sqrt{\frac{R_2 C_4}{R_5 C_1}} + (1 - \mu) \sqrt{\frac{R_5 C_4}{R_2 C_1}}$

Terminata questa breve rassegna di filtri VCVS è doveroso porre alcune considerazioni di carattere generale al loro riguardo. Innanzitutto dobbiamo notare come il fattore  $q_p$ , sebbene possa essere regolato agendo su  $\mu$  in modo indipendente da  $\omega_p$ , sarà sempre funzione di  $K$ . Inoltre  $\omega_p$  può essere regolato indipendentemente da  $q_p$  solo per i filtri passa alto e passa basso, ma non per il passa banda. In ultimo si nota che le caratteristiche generali dei vari filtri saranno comunque sensibili alle variazioni del guadagno  $\mu$ .

## FILTRI A VARIABILE DI STATO

Continuando nella nostra piccola rassegna di filtri, meritano un importante cenno i cosiddetti *Filtri a Variabile di Stato*. Questi filtri, che alcune case come la BURR-BROWN<sup>®</sup>, ropongono come filtri universali integrati, hanno il pregio di palesare un  $q_p$  meno sensibile alle variazioni degli elementi costitutivi il circuito rispetto alle configurazioni già viste, e quindi simili circuiti, che presentano lo svantaggio di necessitare di un maggior numero di componenti, vengono di preferenza utilizzati per realizzare dispositivi con  $q_p > 50$ .

Supponiamo di voler realizzare la seguente funzione di trasferimento biquadratica:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

dividiamo numeratore e denominatore per  $p^2$  ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{V_u}{V_i}(p) &= \frac{a_2 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_0}{p^2}}{b_2 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_0}{p^2}} = \\ &= \frac{a_2}{b_2 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_0}{p^2}} + \frac{\frac{a_1}{p}}{b_2 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_0}{p^2}} + \frac{\frac{a_0}{p^2}}{b_2 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_0}{p^2}} \end{aligned}$$

È facile notare come il primo membro descriva una funzione di tipo Passa Alto, il secondo una Passa Banda ed il terzo una Passa Basso.

Possiamo, a questo punto, incominciare a realizzare questa funzione di trasferimento:

$$\frac{V_u^*}{V_i}(p) = \frac{1}{b_2 + \frac{b_1}{p} + \frac{b_0}{p^2}}$$

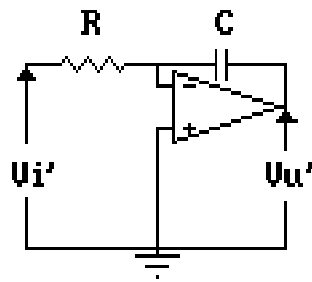
Elaborando questa formula, possiamo scrivere che:

$$V_i = V_u^* b_2 + V_u^* \frac{b_1}{p} + V_u^* \frac{b_0}{p^2}$$

e quindi

$$V_u^* = \frac{1}{b_2} \left[ V_i - \frac{b_1}{p} V_u^* - \frac{b_0}{p^2} V_u^* \right]$$

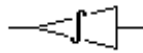
Riprendiamo per un istante il noto circuito integratore senza perdite, o ideale, e calcoliamoci la sua funzione di trasferimento  $\frac{V_u'}{V_i}(p)$



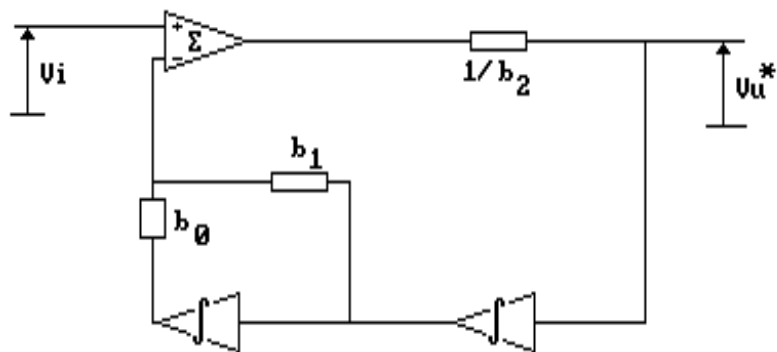
$$\frac{V_{u'}}{V_i}(p) = -\frac{1}{pCR}$$

che è una funzione di trasferimento ad un sol polo, col polo nell'origine.

É abbastanza obbligato pensare che potrò realizzare tutti i poli della mia funzione di trasmissione  $\frac{V_u^*}{V_i}(p)$  con degli integratori di questo tipo, che indicherò col simbolo seguente:

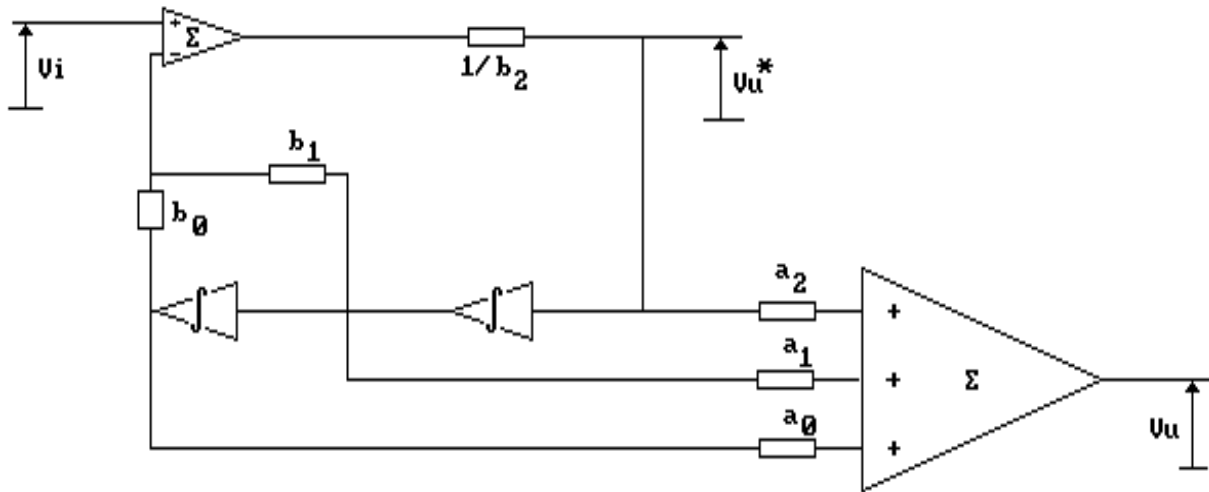


Otterrò, così facendo, un circuito del tipo:



Banalmente, ora, potrò ricostruire tutta la funzione di trasferimento completa, moltiplicando le tre uscite dai tre blocchi  $b_i$  per i rispettivi coefficienti  $a_i$  e sommando i tre segnali, ottenendo un circuito il cui schema a blocchi è il seguente:





Prelevando l'uscita dopo il blocco  $a_0$  otterrò la funzione passa basso:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

prelevando, invece, il segnale dopo il blocco  $a_1$  otterrò la funzione passa banda:

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{a_1 p}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

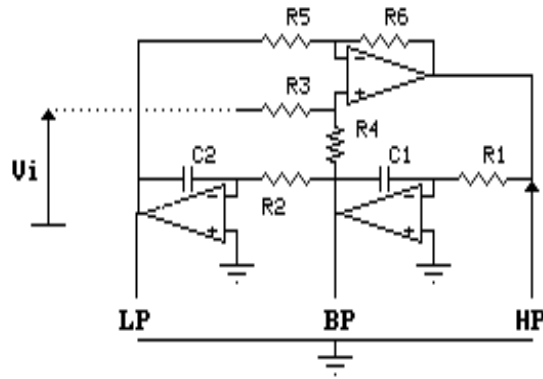
prelevando, infine, il segnale dopo il blocco  $a_2$  otterrò la funzione passa alto:

$$\frac{V_2}{V_i} = \frac{a_2 p^2}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

Possiamo, a questo punto, facilmente ricavarci lo schema elettrico del circuito che realizza la funzione cercata, sostituendo banalmente agli integratori il loro schema precedentemente ricordato, rammentandoci che l'integratore è invertente e quindi che l'uscita del primo integratore andrà *sottratta* dall'ingresso, ed eliminando il sommatore finale che non avrà più senso per realizzare i tre filtri base.

La BURR-BROWN<sup>®</sup>, nel suo filtro universale attivo UAF41, integra, però, anche un quarto amplificatore operazionale che lascia sconnesso; esso serve o per essere usato come amplificatore invertente, o, come vedremo nella prossima sezione, per realizzare un filtro a reiezione di banda.

Lo schema elettrico del circuito completo verrà ad essere il seguente:



In figura sono state indicate le uscite LP (Passa Basso), BP (Passa Banda) e HP (Passa Alto).

Per esercizio, calcoliamoci la funzione di trasferimento delle tre uscite considerate, ricordando che il segnale che esce da ogni integratore sarà  $-\frac{1}{pCR}$  volte quello che entra.

Chiamando  $V_{u_L}$  l'uscita del passa basso,  $V_{u_B}$  l'uscita del passa banda e  $V_{u_H}$  l'uscita del passa alto, potremo inizialmente dire che  $V_{u_B} = V_{u_H} \left[ -\frac{1}{pC_1R_1} \right]$  e che  $V_{u_L} = V_{u_B} \left[ \frac{1}{pC_2R_2} \right]$  e quindi

$$V_{u_L} = V_{u_H} \cdot \frac{1}{p^2C_1C_2R_1R_2}$$

Chiamando  $V_-$  la tensione al morsetto invertente dell'operazionale usato come sommatore, avremo:

$$V_- = (V_i - V_{u_B}) \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} + V_{u_B} = (V_i - V_{u_L}) \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_6} + V_{u_L}$$

sostituendo i valori prima calcolati per  $V_{u_B}$  e  $V_{u_L}$  e svolgendo i calcoli, scriveremo:

$$\begin{aligned} V_i \frac{R_4}{R_3 + R_4} &= V_{u_H} \frac{1}{pC_1R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} - V_{u_H} \frac{1}{pC_1R_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_i \frac{R_4}{R_3 + R_4} &= V_{u_H} \frac{R_5}{R_5 + R_6} - V_{u_H} \frac{1}{p^2C_1C_2R_1R_2} \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_6} + V_{u_H} \frac{1}{p^2C_1C_2R_1R_2} = \\ &= V_{u_H} \left\{ \frac{1}{p^2C_1C_2R_1R_2} \left[ 1 - \frac{R_5}{R_5 + R_6} \right] - \frac{1}{pC_1R_1} \left[ \frac{R_4}{R_3 + R_4} - 1 \right] + \frac{R_5}{R_5 + R_6} \right\} = \\ &= V_{u_H} \left[ \frac{R_6}{R_5 + R_6} \cdot \frac{1}{p^2C_1C_2R_1R_2} + \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{pC_1R_1} + \frac{R_5}{R_5 + R_6} \right] \end{aligned}$$

$$\text{quindi: } \frac{V_{u_H}}{V_i}(p) = \left[ \frac{R_4(R_5 + R_6)p^2C_1C_2R_1R_2}{(R_3 + R_4)R_6 + R_3(R_5 + R_6)pC_2R_2 + R_5(R_3 + R_4)pC_1C_2R_1R_2} \right]$$

ordinando i termini e ponendo la funzione in forma monica si ottiene:

$$\frac{V_{u_H}(p)}{V_i} = \frac{p^2 \cdot \frac{1 + \frac{R_5}{R_6}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}}{p^2 + p \cdot \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

Ricordando che

$$\frac{V_{u_B}(p)}{V_i} = \frac{V_{u_H}(p)}{V_i} \cdot \left[ -\frac{1}{p C_1 R_1} \right]$$

sarà facile dire che

$$\frac{V_{u_B}(p)}{V_i} = - \frac{p \cdot \frac{1}{C_1 R_1} \cdot \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}}{p^2 + p \cdot \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

Parimenti, ricordando che  $\frac{V_{u_L}(p)}{V_i} = \frac{V_{u_H}(p)}{V_i} \cdot \left[ \frac{1}{p^2 C_1 C_2 R_1 R_2} \right]$

sarà agevole scrivere la funzione di trasmissione del filtro Passa Basso:

$$\frac{V_{u_L}(p)}{V_i} = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \cdot \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}}{p^2 + p \cdot \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \cdot \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

Da quanto detto, possiamo notare innanzitutto che il filtro Passa Banda è invertente, quindi, se ciò può disturbare, bisognerà fare seguire l'uscita da un amplificatore invertente che mi rimetta l'uscita in fase con l'ingresso, inoltre, tutti questi filtri possono essere sintonizzati variando simultaneamente o  $R_1$  ed  $R_2$  o  $C_1$  e  $C_2$ , mentre il Q può essere regolato indipendentemente agendo su  $R_4$ . In ogni caso, però, il guadagno K non sarà mai indipendente. Infatti, avendo tutti i filtri, lo stesso denominatore nella funzione di trasferimento, i parametri caratteristici saranno:

la pulsazione  $\omega_p = \sqrt{\frac{R_6}{R_1 R_2 R_5 C_1 C_2}}$

|

il fattore  $\frac{1}{q_p} = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5} \sqrt{\frac{R_2 R_5 C_2}{R_1 R_6 C_1}}}{1 + \frac{R_4}{R_3}}$

uguali per tutti i filtri, mentre i guadagni  $K$ , diversi da configurazione a configurazione, saranno quelli di seguito riportati:

#### **Filtro Passa Basso:**

$$K = \frac{1 + \frac{R_5}{R_6}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}$$

#### **Filtro Passa Banda:**

$$K = \frac{R_4}{R_5}$$

#### **Filtro Passa Alto:**

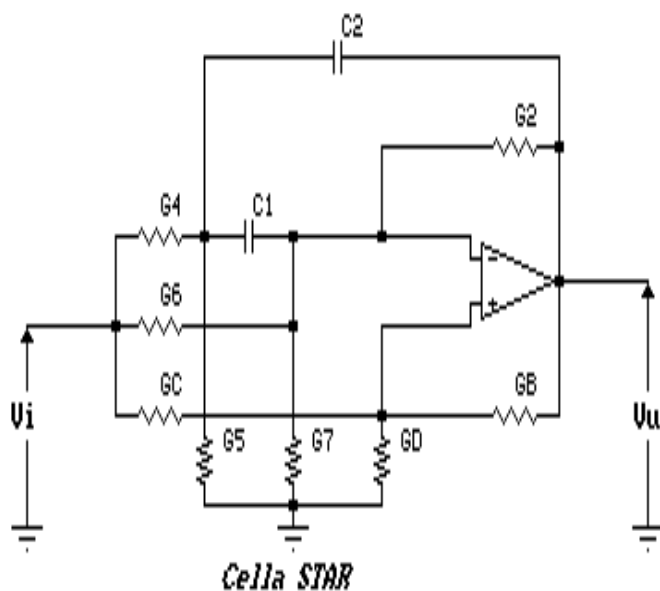
$$K = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}$$

### **LA CELLA "STAR"**

Come abbiamo potuto osservare nel paragrafo precedente, alcune case costruttrici producono e commercializzano dispositivi integrati che siano in grado di realizzare i tre filtri principali (LP, BP, HP). Deliyannis e Friend, nel 1975, presentarono una cella attiva biquadratica ad un solo operazionale, in grado di poter realizzare tutte o, almeno, le principali funzioni di ordine due.

Questa cella prende il nome di *Cella STAR*, acronimo di *Standard Tantalum Active Resonator*, il nome è legato alla tecnologia con la quale vengono integrati i condensatori che vi compaiono. Talvolta essa prende anche il nome di *SAB: Single Amplifier Biquad*.

Il circuito della cella STAR è riportato in figura. Non calcoleremo la funzione di trasferimento, di cui, comunque, si daranno sia la forma che i coefficienti.



Osservando che sono state chiamate con  $G$  le conduttanze delle singole resistenze, e ciò per praticità, scriviamo la forma generale della funzione di trasferimento che si viene ad ottenere:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = \frac{n_2 p^2 + n_1 p + n_0}{p^2 + d_1 p + d_0}$$

in cui i coefficienti sono:

$$n_1 = \frac{G_C}{G_C + G_D} \cdot \frac{1}{C_2} \cdot (G_2 + G_4 + G_5 + G_6 + G_7) + \frac{G_C}{G_C + G_D} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot (G_2 + G_6 + G_7) - \left(1 + \frac{G_B}{G_C + G_D}\right) \cdot$$

$$\left[ \frac{G_4}{C_2} + G_6 \cdot \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right]$$

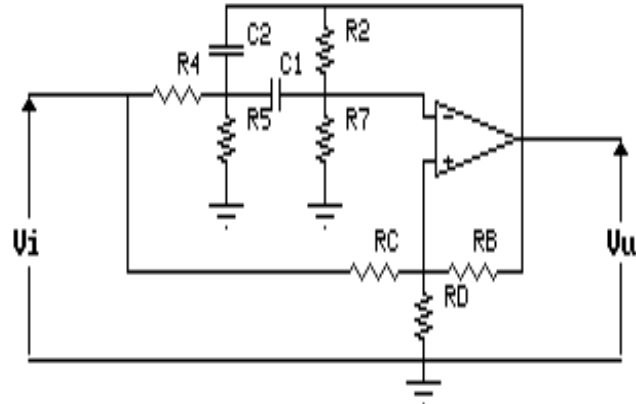
$$n_2 = \frac{G_C}{G_C + G_D}$$

$$n_0 = \frac{1}{C_1 C_2} \left[ \frac{G_C}{G_C + G_D} (G_4 + G_5) + (G_2 + G_6 + G_7) + \frac{G_6}{G_6 + G_7} (G_4 + G_5) (G_6 + G_7) \left(1 + \frac{G_B}{G_C + G_D}\right) \right]$$

$$d_0 = \frac{G_4 + G_5}{C_1 C_2} \left[ G_2 - (G_6 + G_7) \frac{G_B}{G_C + G_D} \right]$$

$$d_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \left[ G_2 - \frac{G_B (G_6 + G_7)}{G_C + G_D} \right] - \frac{(G_4 + G_5) G_B}{G_2 (G_C + G_D)}$$

Si riportano, di seguito, i circuiti relativi ai filtri Passa Alto di Notch, Passa Basso di Notch e Passa Tutto. Il calcolo dei coefficienti della funzione di trasferimento è piuttosto laborioso e lo si lascia al Lettore, riportando però i risultati finali.



**Cella STAR Low Pass Notch**

La funzione di trasferimento è del tipo:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = \frac{K[p^2 + (2\pi f_z)^2]}{p^2 + \frac{2\pi f_p}{q_p} \cdot p + (2\pi f_p)^2}$$

ed i coefficienti della funzione di trasferimento sono:

$$n_0 = \frac{1}{C_1 C_2} \left[ \frac{R_D}{R_C + R_D} \left( \frac{R_4 + R_5}{R_4 R_5} \right) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} \right) \right]$$

$$d_0 = \frac{R_4 + R_5}{C_1 C_2 R_4 R_5} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{R_C R_D}{R_7 R_B (R_C + R_D)} \right]$$

$$d_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{R_C R_D}{R_7 R_B (R_C + R_D)} \right] - \left( \frac{R_4 + R_5}{R_4 R_5 R_B} \right) \cdot \frac{R_C + R_D}{C_2 (R_C + R_D)}$$

Con questi dati, i parametri caratteristici della cella Passa Basso di Notch sono:

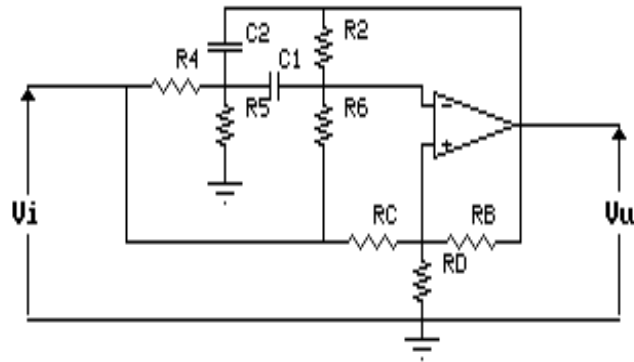
$$K = \frac{R_D}{R_D + R_C}$$

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_0}{K}}$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{d_0}$$

$$q_p = \frac{\sqrt{d_0}}{d_1}$$

Per il filtro Passa Alto di Notch si avrà:



**Cella STAR High Pass Notch**

i coefficienti della F.d.T. sono:

$$n_0 = \frac{1}{C_1 C_2} \left[ \frac{R_D}{R_C + R_D} \left( \frac{R_4 + R_5}{R_4 R_5} \right) \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right) - \left( \frac{R_4 + R_5}{R_4 R_5 R_6} \right) \left( 1 + \frac{R_C R_D}{R_B (R_C + R_D)} \right) \right]$$

$$d_0 = \frac{R_4 + R_5}{C_1 C_2 R_4 R_5} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{R_C R_D}{R_6 R_B (R_C + R_D)} \right]$$

$$d_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \left[ \frac{1}{R_2} - \frac{R_C R_D}{R_6 R_B (R_C + R_D)} \right] - \left( \frac{R_4 + R_5}{R_4 R_5 R_B} \right) \frac{R_C + R_D}{C_2 (R_C + R_D)}$$

Con questi dati, i parametri caratteristici della cella Passa Alto di Notch sono:

$$K = \frac{R_D}{R_C + R_D}$$

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_0}{K}}$$

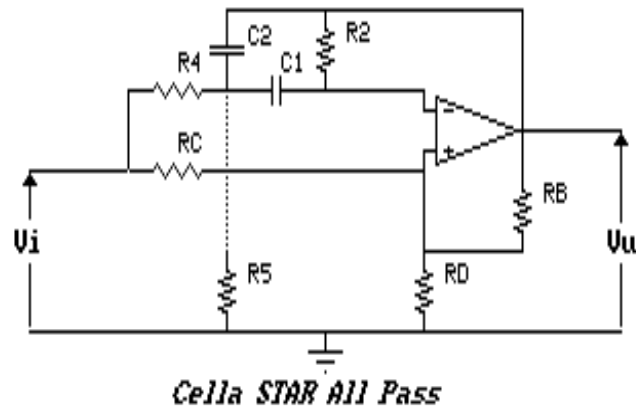
$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{d_0}$$

$$q_p = \frac{\sqrt{d_0}}{d_1}$$

Per la cella Passa Tutto dovranno essere verificate le seguenti relazioni:

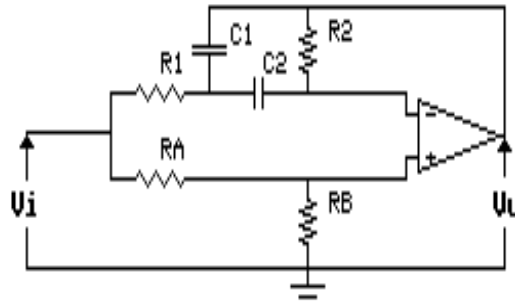
$$n_1 = -n_2 d_1 < 0$$

$$n_0 = \frac{\sqrt{d_0}}{d_1}$$



**Cella STAR All Pass**

In base, però, alle relazioni scritte, è possibile ridurre il circuito, eliminando  $R_5$  ed  $R_B$ , realizzando lo schema di figura:



**Filtro Passa Tutto**

La funzione di trasferimento di questo circuito è la seguente:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = \frac{p^2 \frac{R_B}{R_A + R_B} + p \frac{R_B R_1 (C_1 + C_2) - R_A R_2 C_2}{C_1 C_2 R_1 R_2 (R_A + R_B)} + \frac{R_B}{C_1 C_2 R_1 R_2 (R_A + R_B)}}{p^2 + p \frac{R_1 (C_1 + C_2)}{C_1 C_2 R_1 R_2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

è facile vedere che, per realizzare un filtro Passa Tutto e, quindi, per soddisfare le relazioni prima ricordate, deve essere rispettato il rapporto:

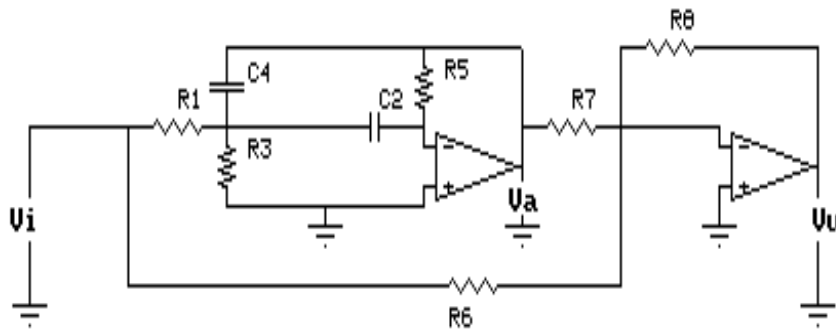
$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{2R_1 (C_1 + C_2)}{R_2 C_2}$$

Anche per realizzare un filtro a Reiezione di Banda (Band Rejection), il cosiddetto "filtro notch" per eccellenza, esistono diverse soluzioni circuitali; fra tutte, ne analizzeremo due che differiscono sia per la topologia della rete, sia per i concetti che ne stanno alla base.

In primo luogo, l'idea è abbastanza banale: se da tutto il segnale togliessimo solo una gamma di frequenze, otterremmo, evidentemente, un filtro a reiezione di banda. Tenendo inoltre conto del fatto che sottrarre un segnale da un altro è pari a sommare i due segnali sfasandone uno di



180°, è ovvio che mi basterà costruire un sommatore a cui far giungere il segnale di ingresso ed il segnale che mi perviene da un filtro passa banda invertente. Riunendo quanto detto in un circuito otteniamo lo schema della figura seguente, nella quale è facile riconoscere un filtro passa banda a reazioni multiple seguito da un sommatore invertente.



**Filtro a reiezione di banda con due operazionali**

Per l'analisi di questo filtro basterà notare che, come già visto, la funzione di trasferimento del filtro Passa Banda fornisce:

$$V_a(p) = -V_i \left\{ \frac{p \cdot R_3 R_5 C_2}{p^2 \cdot R_1 R_3 R_5 C_2 C_4 + p \cdot [R_1 R_3 (C_2 + C_4)] + (R_1 + R_3)} \right\}$$

mentre l'analisi del circuito sommatore ci dà:

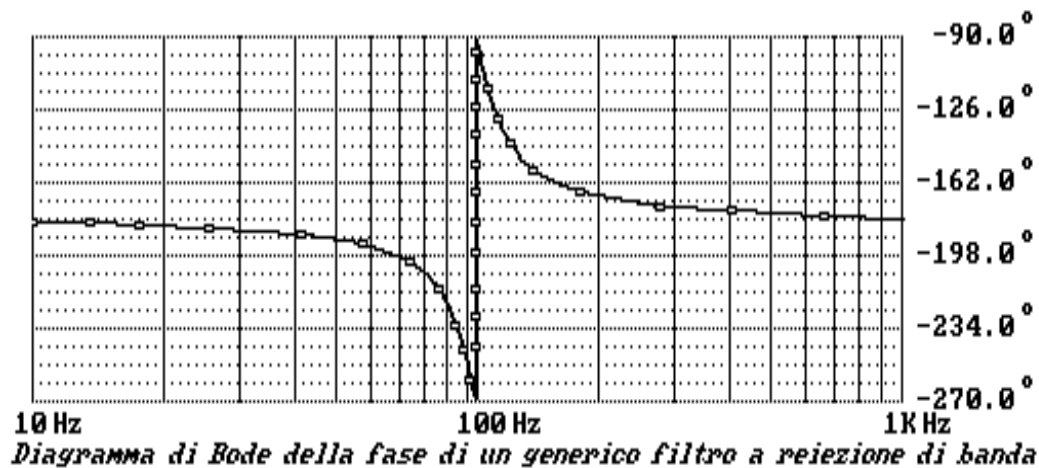
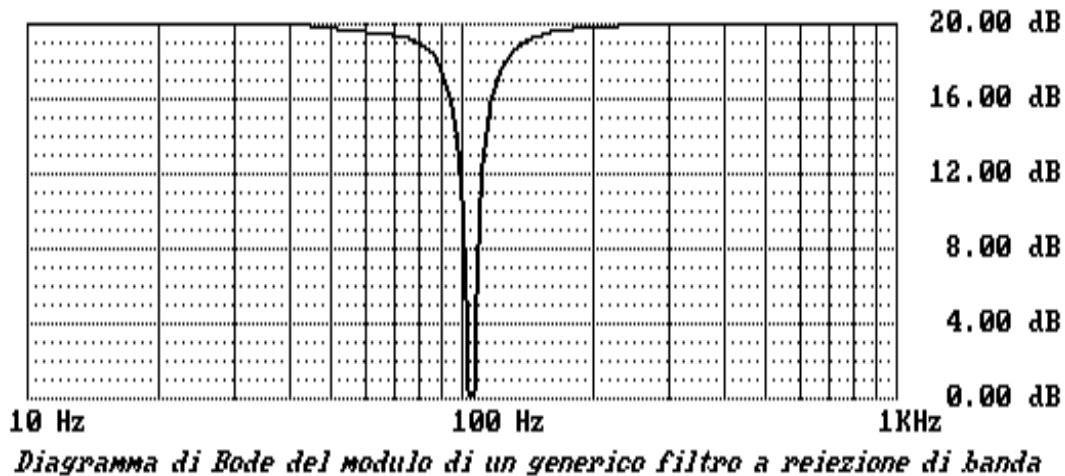
$$V_u = -\frac{R_8}{R_7} V_a - \frac{R_8}{R_6} V_i$$

Il termine  $q_p$  del filtro è evidentemente dato dal filtro passa banda. Ponendo  $C_2 = C_4 \equiv C_e$  mettendo a sistema le due relazioni, otteniamo la funzione di trasmissione del circuito:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = -\frac{R_8}{R_7} \cdot \frac{1}{R_6} \cdot \frac{p^2 \cdot R_1 R_3 R_5 R_7 C_e^2 + p \cdot [R_3 C_e (R_5 R_6 - 2R_1 R_7)] - R_7 (R_1 + R_3)}{p^2 \cdot R_1 R_3 R_5 C_e^2 + p \cdot 2R_1 R_3 C_e + R_6 (R_1 + R_3)}$$

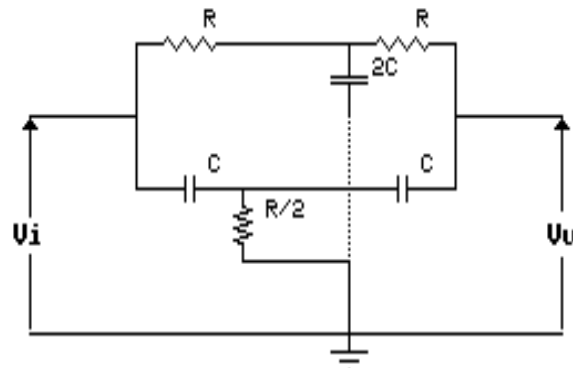
Per far sì che la funzione sia quella di un filtro a reiezione di banda, bisognerà garantire che il termine in  $p$  a numeratore si annulli, quindi bisognerà soddisfare la relazione:  $\frac{R_6}{R_7} = \frac{2R_1}{R_5}$ .

I diagrammi di Bode in modulo e fase di un generico filtro di questo tipo, sono riportati in figura.



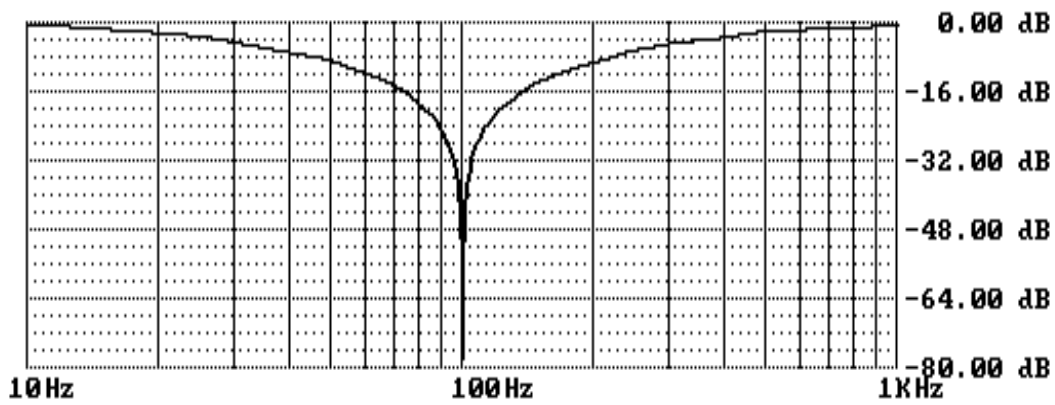
Il secondo metodo per realizzare un filtro a reiezione di banda fa leva sul fatto che è possibile costruire dei circuiti risonanti che si comportano, idealmente, come dei circuiti aperti, quindi aventi reiezione (o *grado di annullamento*) teoricamente infinito, alla frequenza di risonanza. Uno di questi circuiti è la cosiddetta "Cella a Doppio T" o *Twin Tee*. Basterà far precedere un normale amplificatore da questa cella per ottenere un filtro arresta banda.

La cella a doppio T è riportata in figura:



**Cella a Doppio T**

Il diagramma di Bode in modulo della stessa è il seguente:



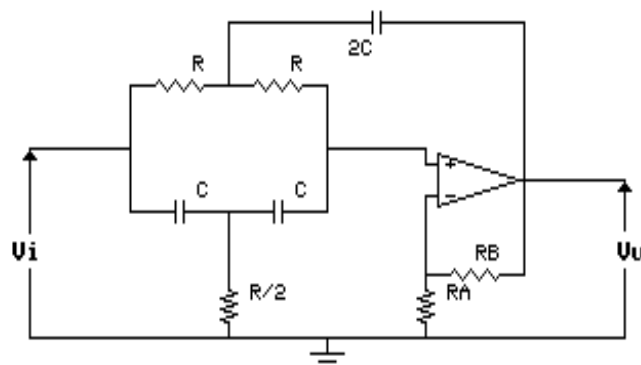
*Diagramma di Bode in modulo di una cella a doppio T*

Esistono vari metodi di calcolo che ci permettono di ricavare la funzione di trasferimento di questa cella, visibilmente simmetrica, si possono, ad esempio, operare due trasformazioni stella-triangolo, o, metodo più pratico, scrivere le equazioni ai nodi ed impostare un sistema, nel nostro caso, di quattro equazioni in quattro incognite. In ogni caso, la funzione di trasferimento è la seguente:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = \frac{p^2 C^2 R^2 + 1}{p^2 C^2 R^2 + 4pCR + 1}$$

questa funzione ha un minimo in  $\omega = CR$  e quindi la frequenza alla quale il filtro presenta la massima reiezione è  $f = \frac{1}{2\pi RC}$ :

É evidente, a questo punto, la struttura topologica del filtro a reiezione di banda:



*Filtro a reiezione di banda con cella a doppio T*

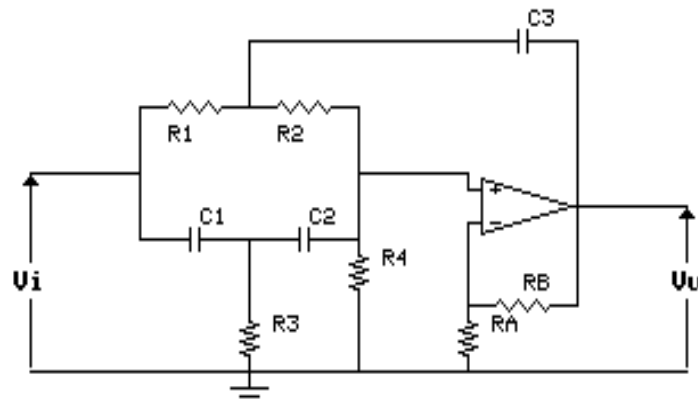
La funzione di trasferimento di questo filtro è:

$$\frac{V_u}{V_i}(p) = \frac{\frac{R_A + R_B}{R_A} (p^2 C^2 R^2 + 1)}{p^2 C^2 R^2 + p \cdot 2RC \left[ 2 - \left( \frac{R_A + R_B}{R_A} \right) \right] + 1}$$

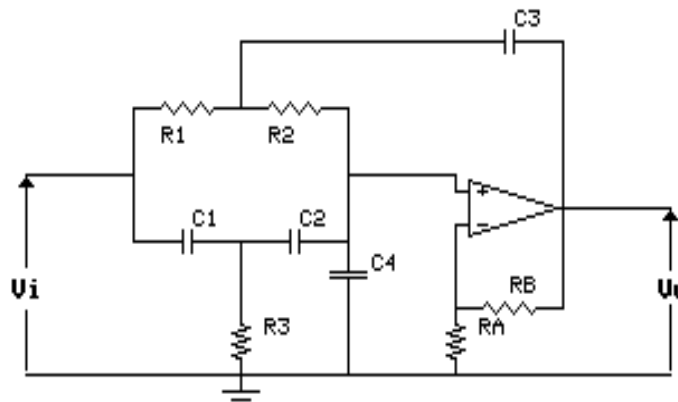
Osservando questa funzione salta all'occhio che il Q del filtro è funzione del termine  $\left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right)$  e che lo stesso termine dovrà essere minore di 2 per garantire la stabilità del circuito.

Esaminando la struttura del filtro a reiezione di banda appena visto, ci accorgiamo che, inserendo un'opportuna ammettenza fra il morsetto non invertente dell'operazionale e la massa, è possibile rendere la frequenza  $\omega \neq \omega_p$ . Ciò si trasforma, come abbiamo già visto, nel realizzare dei filtri HPN o LPN. Nel caso in cui l'ammettenza sia una resistenza,  $\omega_p$  diventa minore di  $\omega_z$ , realizzando un filtro Passa Basso di Notch, se invece inserissimo una capacità, otterremmo un Passa Alto di Notch. In ogni caso, dovranno valere le relazioni  $C_3 = C_1 + C_2$  ed  $R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

I circuiti che si ottengono sono riportati in figura.

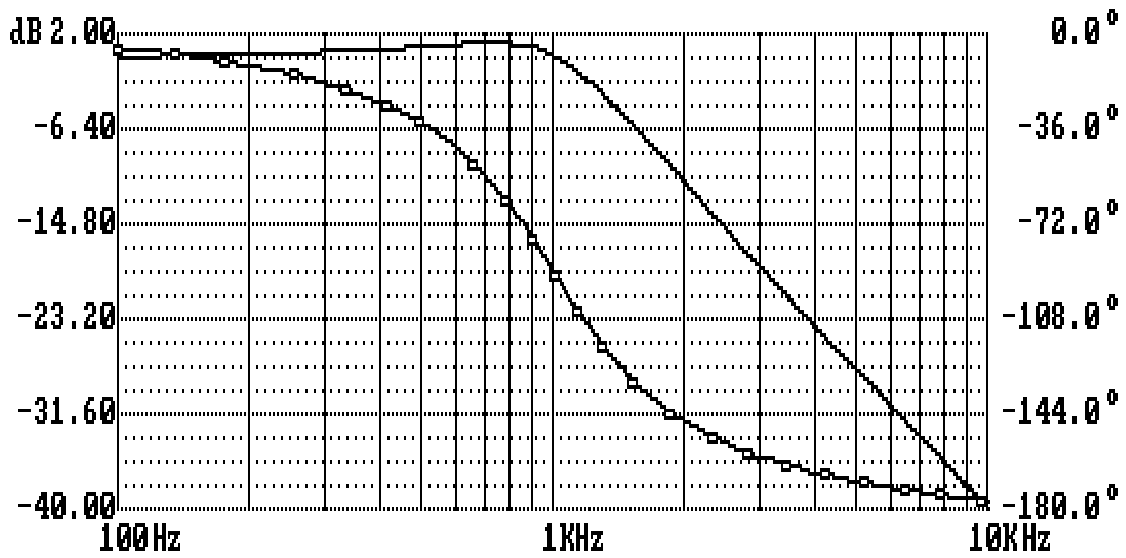


*Filtro Low Pass Notch*

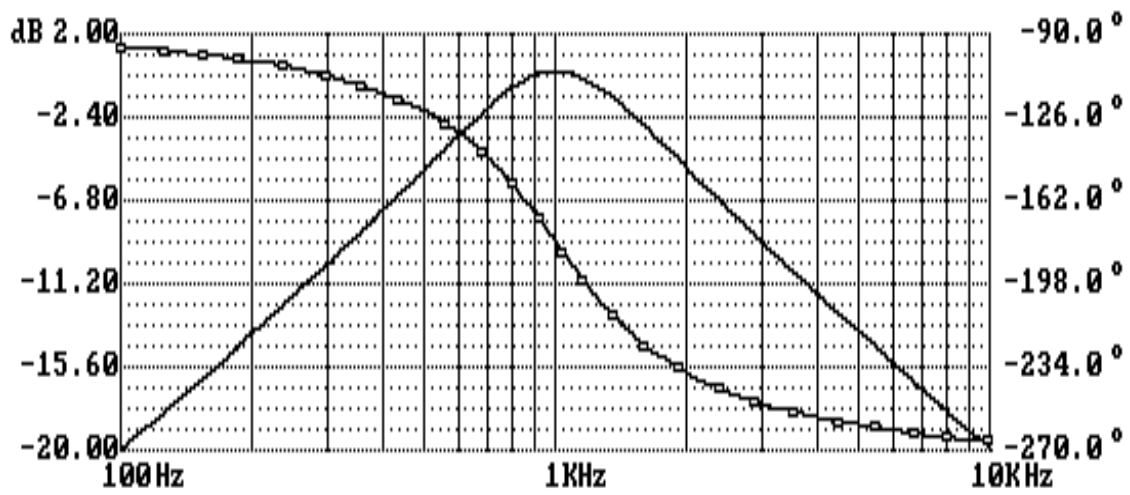


*Filtro High Pass Notch*

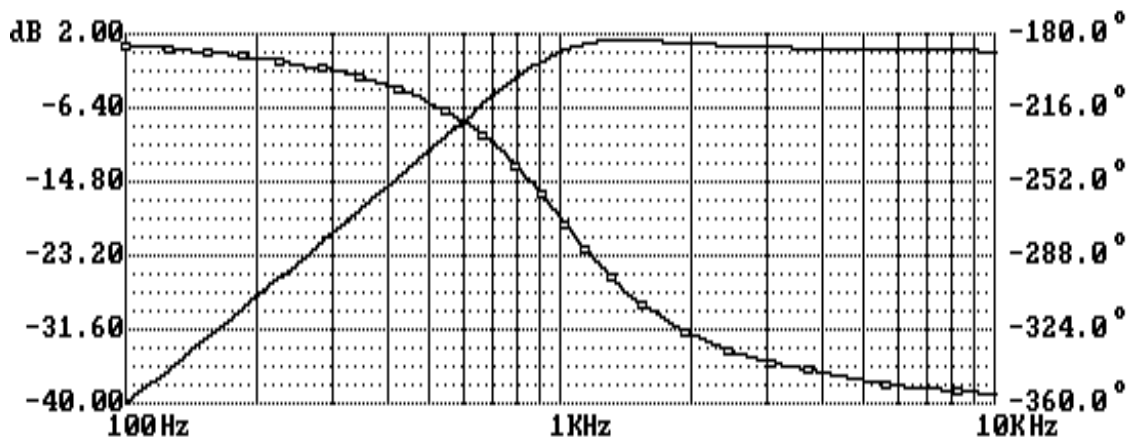
Al termine di questo capitolo, che sicuramente non vuol essere completo ma vuole, per altro, accarezzare i diversi tipi di filtri attivi del secondo ordine, riportiamo di seguito i diagrammi di Bode relativi ai filtri più significativi. Gli schemi degli stessi sono quelli riportati nelle pagine precedenti ed i valori dei componenti sono, rispettando gli eventuali rapporti indicati nel testo, 15.92 nF per le capacità e 10 K $\Omega$  per le resistenze.



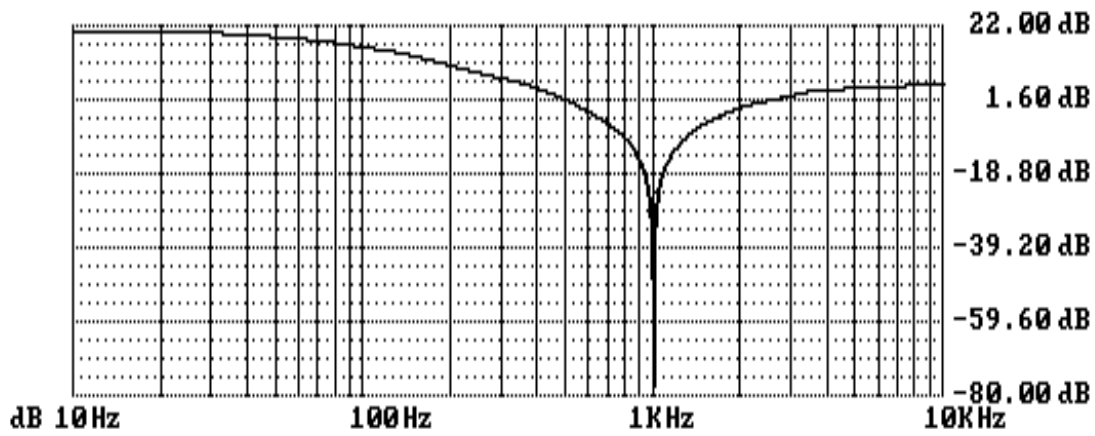
*Diagramma di Bode in modulo e fase di un filtro passa basso a variabili di stato*



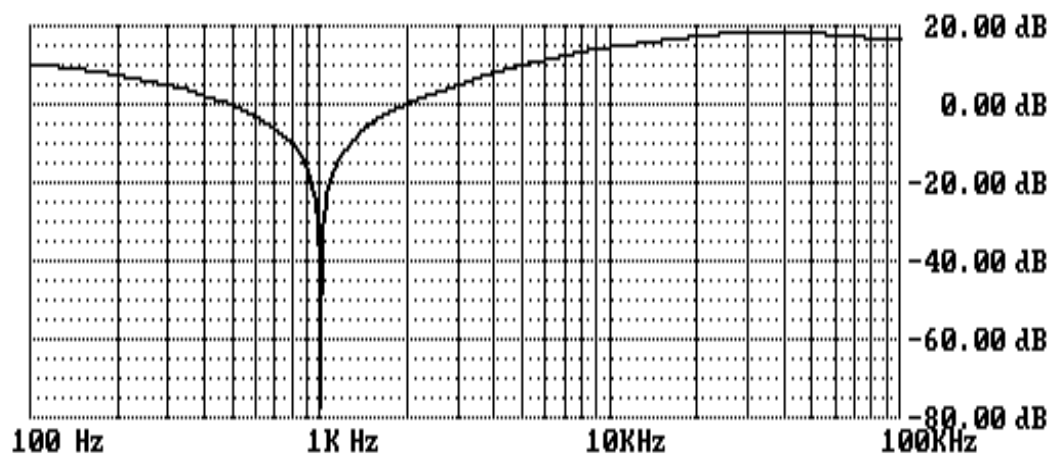
*Diagramma di Bode in modulo e fase di un filtro Passa Banda a variabili di stato*



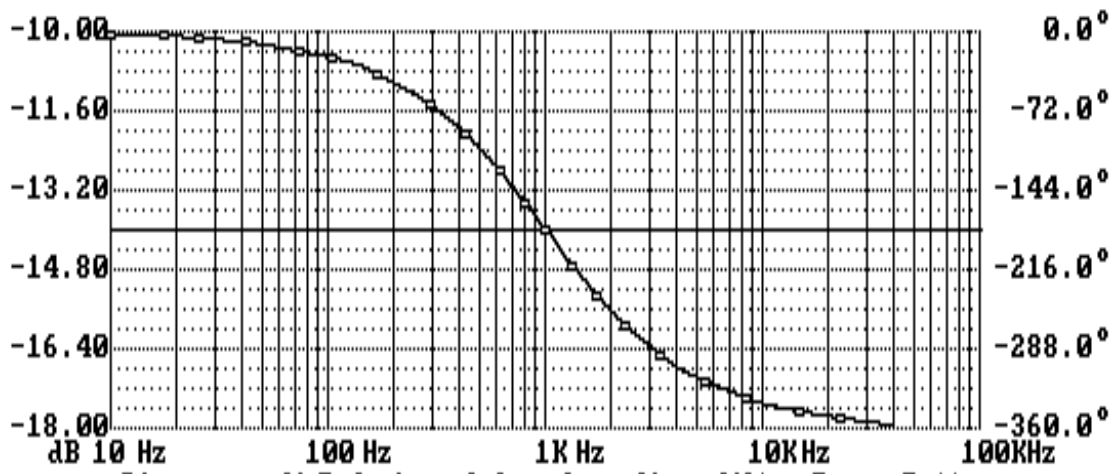
*Diagramma di Bode in modulo e fase di un filtro passa alto a variabili di stato*



*Diagramma di Bode in modulo di un filtro LPN*



*Diagramma di Bode in modulo di un filtro HPN*



*Diagramma di Bode in modulo e fase di un filtro Passa Tutto*