FILTRI

Un filtro è un circuito selettivo in frequenza che lascia passare i segnali in una certa banda e blocca, oppure attenua, I segnali al di fuori di tale banda. I filtri possono essere attivi o passivi.

- I filtri passivi, usano solo componenti passivi (resistenze, condensatori e induttanze).
- I filtri attivi, oltre ai componenti passivi prevedono la presenza di componenti attivi come BJT, ed A.O.

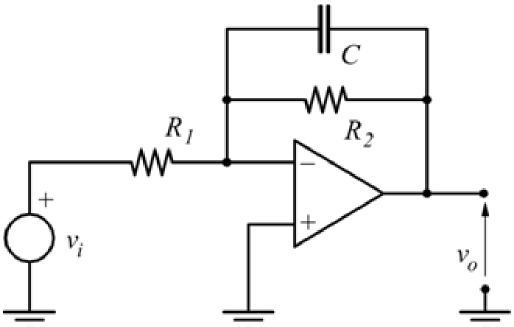
Come si può intuire, i filtri attivi sono preferibili a quelli passivi, dato che introducono un guadagno (il segnale nella banda passante viene amplificato) anche se di necessitano alimentazione, introducono rumore elettrico e sono suscettibili di deriva termica.

FILTRI ATTIVI DEL I°ORDINE, PASSA-BASSO

E' consuetudine considerare la reattanza capacitiva $\overline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{sC}$

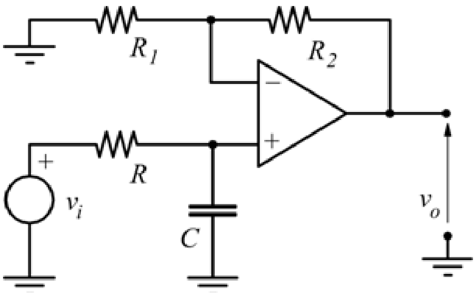
utilizzando la pulsazione complessa $s=\sigma+j\omega$ che soltanto in regime sinusoidale puro coincide con la pulsazione ordinaria: $s=j\omega$.

E' possibile costruire un filtro attivo del I°ordine, attraverso la seguente soluzione circuitale:



essendo l'amplificatore invertente, dalla formula che esprime l'amplificazione $\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$ si ha:

$$T(s) = -\frac{R_2 // \frac{1}{sC}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{(1+sCR_2)}$$

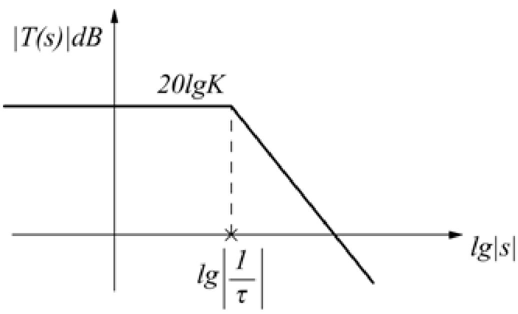


Se invece volessimo usare una configurazione . non invertente con amplificazione

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)$$

Notiamo come in entrambi i casi (a meno del segno) la funzione di trasferimento sia riconducibile alla forma:

$$T(s) = \frac{K}{1+s\tau}$$

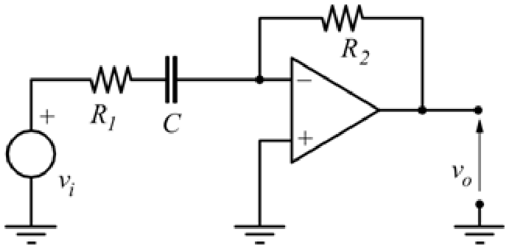


Il modulo di questa funzione viene rappresentato sul diagramma logaritmico riportato a fianco.
Vengono amplificate solo le frequenze basse, al di sotto della pulsazione di taglio $\omega_T = \frac{1}{\tau}$

che per definizione è la pulsazione alla quale il guadagno si abbassa di 3dB rispetto al guadagno di centro banda; in prossimità di $1/\tau$ il modulo del guadagno si abbassa al valore $K/\sqrt{2}$ e si ha uno sfasamento di ±45°.

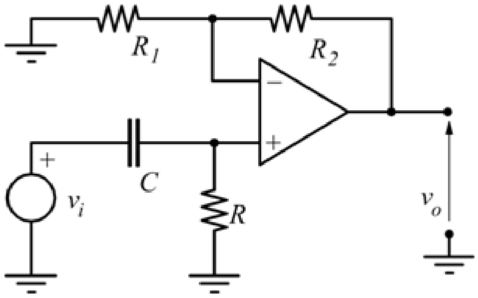
Filtri attivi del I° ordine, passa-alto

Una soluzione con A.O. in configurazione invertente è:



si avrebbe

$$T(s)=-\frac{R_2}{R_1+\frac{1}{sC}}=-\frac{sR_2C}{1+sR_1C}$$



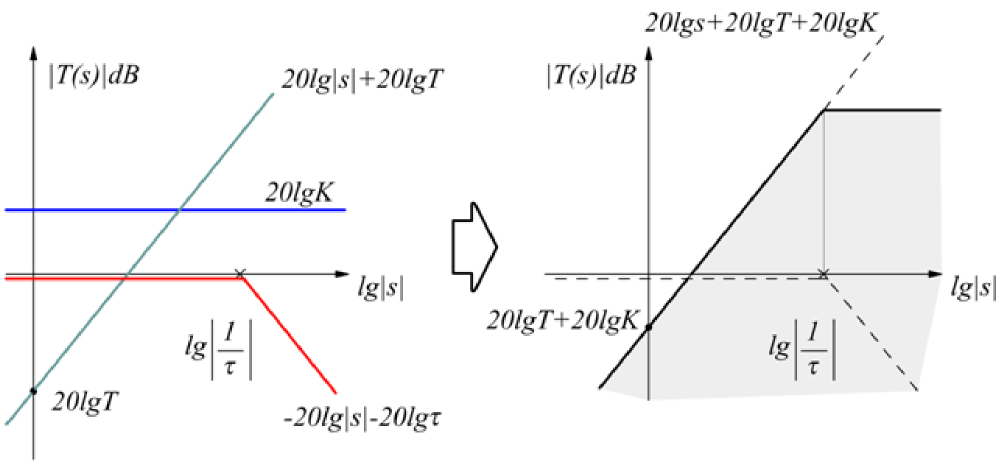
oppure in configurazione non invertente dove è

$$T(s)=\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\frac{sRC}{1+sRC}$$

si tratta in questo caso di una f.d.t. con un polo e uno zero del tipo:

$$T(s)=K\cdot\frac{sT}{1+s\tau}$$

La costruzione del diagramma di Bode è, in questo caso, leggermente più laboriosa:

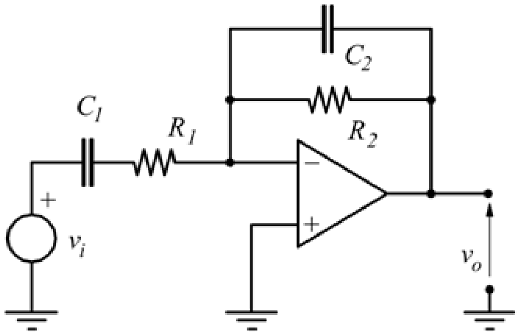


Nel primo caso l'amplificazione massima in banda si ha per $\lim_{s\to\infty}|T(s)|=\frac{R_2}{R_1}$

Nel secondo caso $\lim_{s\to\infty}|T(s)|=1+\frac{R_2}{R_1}$

in entrambi i casi la pulsazione di taglio si ha per $\omega_T=\frac{1}{\tau}$

Filtri attivi del I° ordine, passa-banda



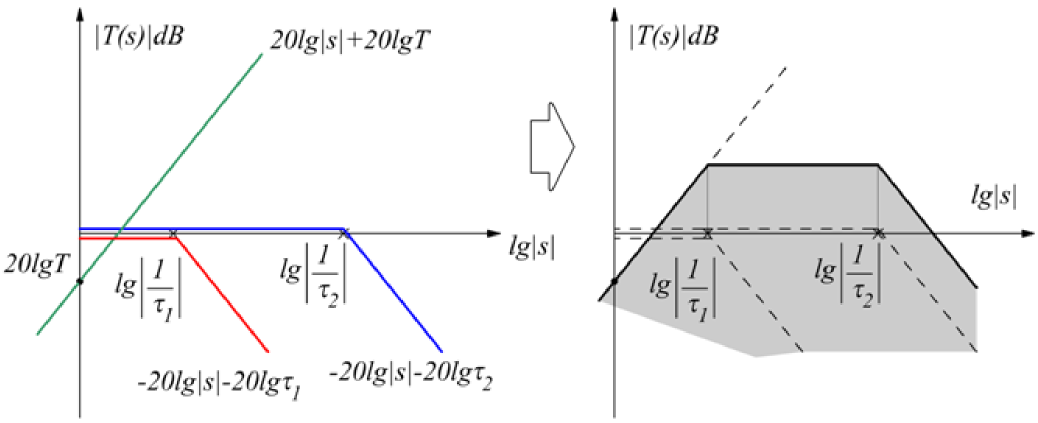
E' facile concludere come sia possibile produrre un filtro passa- banda combinando le due configurazioni precedenti.

Essendo la configurazione invertente:

$$T(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad \begin{cases} Z_2 = \dfrac{1}{sC_2} // R_2 = \dfrac{\dfrac{R_2}{sC_2}}{R_2 + \dfrac{1}{sC_2}} = \dfrac{R_2}{1 + sC_2R_2} \\ Z_1 = R_1 + \dfrac{1}{sC_1} = \dfrac{1 + sC_1R_1}{sC_1} \end{cases}$$

$$T(s) = -\frac{\dfrac{R_2}{1 + sC_2R_2}}{\dfrac{1 + sC_1R_1}{sC_1}} = -\frac{sC_1R_2}{(1 + sC_1R_1)(1 + sC_2R_2)} \rightarrow |T(s)| = \frac{R_2}{R_1}\frac{sC_1R_1}{(1 + sC_1R_1)(1 + sC_2R_2)}$$

il diagramma di Bode è pressoché identico a quello del filtro passa-alto, ma vi è la presenza di un polo supplementare o meglio vi sono due poli reali e distinti.



K è il guadagno a centro banda: una volta superata la pulsazione $1/\tau_1$ il primo polo si elide con lo zero; questo vale finché il secondo polo non inizia ad influenzare la risposta.

$$|T(s)| = K\frac{s\tau_1}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \quad \rightarrow \quad |T(s)| = \frac{K}{\tau_1\tau_2}\frac{s\tau_1}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)}$$

$$|T(s)| = \frac{K}{\tau_2}\frac{s}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2)} \quad \rightarrow |T(s)| = K\frac{\omega_s s}{(s + \omega_i)(s + \omega_s)}$$

con ω_s=pulsazione di taglio superiore e ω_i=pulsazione di taglio superiore.

Le formule che riassumono il comportamento dei filtri del I°ordine sono:

$$\boxed{T(s) = \frac{K\omega_n}{s + \omega_n} = \frac{K}{1 + \dfrac{s}{\omega_n}}}$$

Filtro passa-basso

La T(s) presenta un polo $p = -\omega_n$ e un guadagno statico (s→0) $K_{ST} = K$.

$$T(s) = \frac{K \cdot s}{s + \omega_n} = \frac{\frac{K}{\omega_n} s}{1 + \frac{s}{\omega_n}}$$

Filtro passa-alto

$$T(s) = K \frac{\omega_s s}{(s + \omega_i)(s + \omega_s)}$$

Filtro passa-banda

Filtri attivi del II°ordine

I filtri del II°ordine hanno la caratteristica di avere al denominatore della funzione di trasferimento una funzione di II°grado nella variabile s:

$$D(s) = s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2$$

oppure nella forma equivalente:

$$D(s) = s^2 + \frac{\omega_n}{Q} s + \omega_n^2$$

dove si è posto $Q = \frac{1}{2\xi}$

Le radici della D(s) forniscono i poli della funzione di trasferimento T(s).

$$p_{1/2} = -\omega_n (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \qquad \text{[I]}$$

La pulsazione ω_n è la pulsazione di taglio che caratterizza i filtri passa-basso o passa-alto. Lo smorzamento ξ e il fattore di merito Q definiscono il comportamento della risposta in frequenza.

Per ξ>1 i poli sono reali distinti.
Per ξ=1 i poli sono reali coincidenti.
Per ξ<1 i poli sono complessi coniugati.

Per consentire un veloce passaggio tra l'intervallo di frequenza in cui vi è conduzione e quello in cui il circuito opera l'azione filtrante si impone un valore per lo smorzamento ξ<1.

Filtro passa-basso del II°ordine

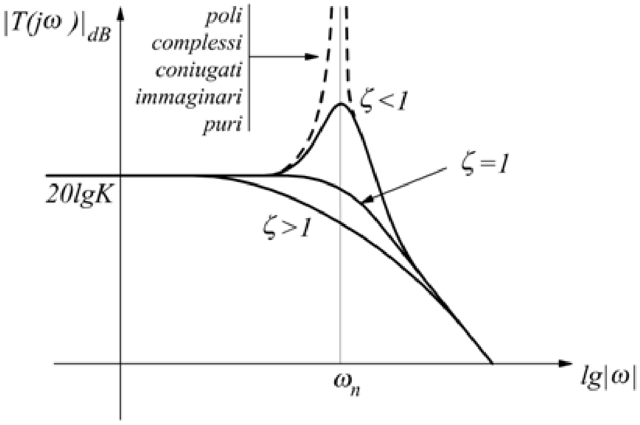
La funzione di trasferimento assume la forma:

$$T(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2} \qquad \text{[II]}$$

La T(s) presenta due poli che per ξ<1 sono complessi coniugati. Per *s=jω* il modulo e la fase valgono:

$$T(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\xi\omega_n)^2}} \qquad \text{[III]}$$

$$\phi = -atg \frac{2\omega\xi\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \qquad \text{[IV]}$$



per $\omega << \omega_n \longrightarrow |T(j\omega)| = K$ **(zona piatta ad amplificazione costante)**

mentre per $\omega >> \omega_n \longrightarrow |T(j\omega)| \cong \dfrac{K\omega_n^2}{\omega^2}$

che nel grafico corrisponde ad una pendenza di -40dB/dec (due poli sovrapposti).

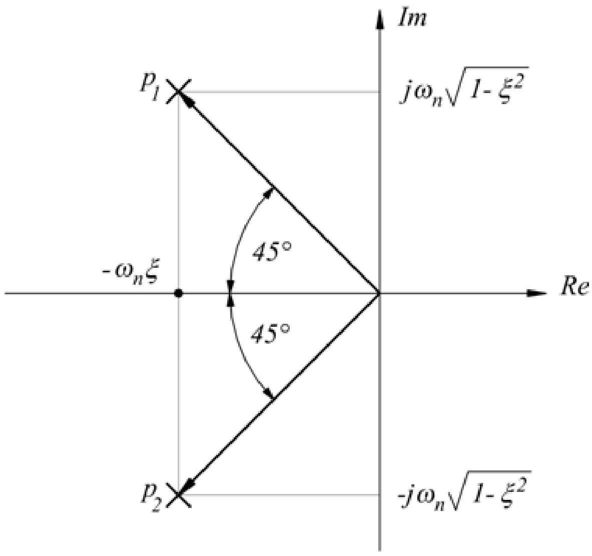
Se lo smorzamento $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \longrightarrow Q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **il filtro è detto di Butterworth; i poli dati dalla [I] sono complessi e coniugati e valgono:**

$$p_{1/2} = -\omega_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \longrightarrow p_{1/2} = -\omega_n\xi \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

La risposta in frequenza del filtro è la più piatta possibile; in corrispondenza della pulsazione di taglio ω_n il modulo *T(jω)* si riduce ad un valore $\sqrt{2}$ rispetto al valore massimo K.

Infatti, se nella [III] poniamo $\omega = \omega_n$ **e** $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ **avremo**

$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \longrightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20\,lg\,K - 20\,lg\,\sqrt{2} = 20\,lg\,K - 3dB$$



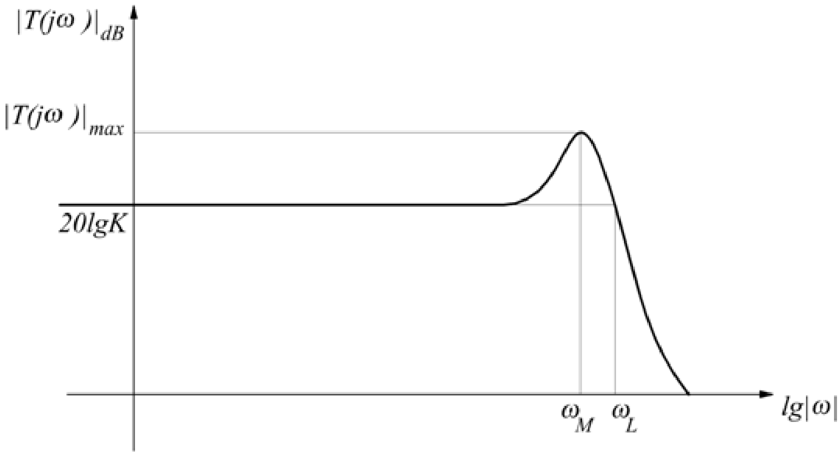
in corrispondenza della pulsazione di taglio l'amplificazione si abbassa di 3dB rispetto al guadagno massimo alle basse frequenze.

La dislocazione dei poli di un filtro del II° ordine passa-basso di Butterworth è rappresentata qui a fianco.

Per $\xi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow Q = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **il filtro è detto di Bessel .**

Se $\xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **il filtro è detto di Chebyshev e rende tanto più verticale la**

risposta in frequenza per $\omega > \omega_n$ tanto quanto più ξ è piccolo. Per $\xi \to 0$ in $\omega = \omega_n$ la [III] tende ad infinito e così la pendenza della curva diventa verticale.



La pulsazione ω_M in cui $|T(j\omega)|$ è massimo si ottiene ponendo a zero la derivata prima della [III] rispetto ad ω.

$$\omega_M = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \qquad \text{[V]}$$

Sostituendo questo valore nella [III] si ha $|T(j\omega)|_{max} = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

La pulsazione ω_L si ottiene ponendo uguale a K il secondo membro della [III] ottenendo:

$$\omega_L = \omega_n \sqrt{2(1-2\xi^2)} \qquad \text{[VI]}$$

se confrontiamo la [V] con la [VI] si ottiene: $\omega_L = \omega_M \sqrt{2}$.

Parametri per un filtro Chebyshev di II° ordine passa basso:

ξ	ω_M	ω_L	$\lvert T(j\omega)\rvert_{max}$	
0	ω_n	$\omega_n\sqrt{2}$	∞	*picco di risonanza infinita*
$\frac{1}{2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$	ω_n	$\frac{2K}{\sqrt{3}}$	
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	K	*limite di Butterworth*

FILTRO PASSA-ALTO DEL II°ORDINE

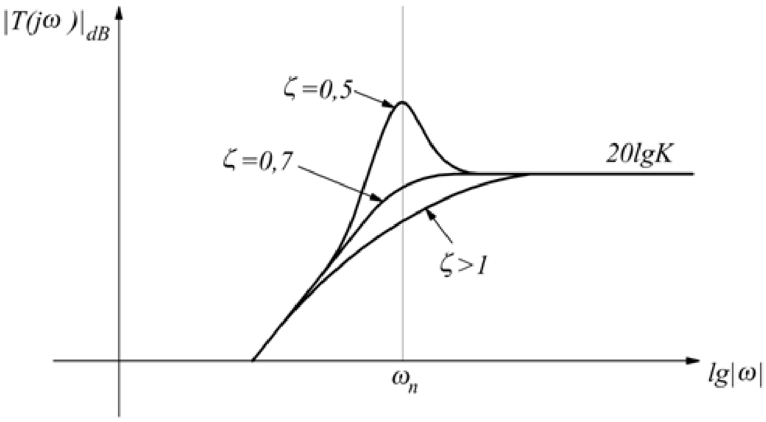
La funzione di trasferimento assume la forma:

$$\boxed{T(s) = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2}} \qquad \text{[VII]}$$

La $|T(s)|$ per ξ<1 presenta due poli complessi coniugati e due zeri nell'origine. In regime sinusoidale s=jω, il modulo e la fase valgono:

$$T(j\omega) = \frac{K\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\xi\omega_n)^2}} \qquad \text{[VIII]}$$

$$\phi = 180 - atg\frac{2\omega\xi\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \qquad \text{[IX]}$$



per $\omega >> \omega_n \longrightarrow |T(j\omega)| = K$ **(zona piatta ad amplificazione costante) mentre per**

$\omega << \omega_n \longrightarrow |T(j\omega)| \cong \dfrac{K\omega^2}{\omega_n^2}$ **che corrisponde ad una pendenza di +40dB/dec.**

Nel caso di distribuzione di Butterworth $Q = \xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **il modulo della T(jω) si riduce di** $\sqrt{2}$ **in corrispondenza di** $\omega = \omega_n$**. Se poniamo, infatti, nella [VIII]** $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **con** $\omega = \omega_n$**:**

$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \longrightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 3dB$$

La pulsazione di taglio ω_n **viene, dunque, definita sia per il filtro passa-alto che per quello passa-basso come la pulsazione che riduce di 3dB il valore massimo di |T(jω)|.**

Per $\xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **il filtro è detto di Chebyshev e la risposta in frequenza nell'intorno di** ω_n **è tanto più verticale quanto ξ è piccolo. Anche in questo secondo caso la risposta in frequenza presenta un picco di risonanza ad una pulsazione** ω_M **che può essere calcolata ponendo a zero la derivata prima della [VIII]:**

$$\omega_M = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} \qquad \text{[X]}$$

Sostituendo questo valore nella [VIII] si ha $|T(j\omega)|_{max} = \dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ **come nel filtro passa-basso. La pulsazione** ω_L **si ottiene ponendo uguale a K il secondo membro della [VIII] ottenendo:**

$$\omega_L = \frac{\omega_n}{\sqrt{2(1-2\xi^2)}} = \frac{\omega_M}{\sqrt{2}} \qquad \text{[XI]}$$

Parametri per un filtro Chebyshev di II° ordine passa alto:

ξ	ω_M	ω_L	$\lvert T(j\omega)\rvert_{max}$	
0	ω_n	$\frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$	∞	*picco di risonanza infinita*
$\frac{1}{2}$	$\omega_n\sqrt{2}$	ω_n	$\frac{2K}{\sqrt{3}}$	
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	∞	∞	K	*limite di Butterworth*

FILTRO PASSA-BANDA DEL II°ORDINE

La definizione dei filtri passa-banda del II° ordine viene fatta in funzione del fattore di merito $Q=\frac{1}{2\xi}$ piuttosto che in ragione dello smorzamento ξ. Questo avviene per rendere assimilabili questi filtri con quelli con quelli passivi (passa-banda) di tipo RCL.
Di fatto il fattore di merito Q, definisce la larghezza di banda B:

$$B = f_s - f_i$$

con f_s=frequenza di taglio superiore ed f_i=frequenza di taglio inferiore. Poi si dimostra che:

$$B = \frac{f_0}{Q}$$

con f_0=frequenza di centro-banda. La funzione di trasferimento di un filtro passa-banda del II° ordine è:

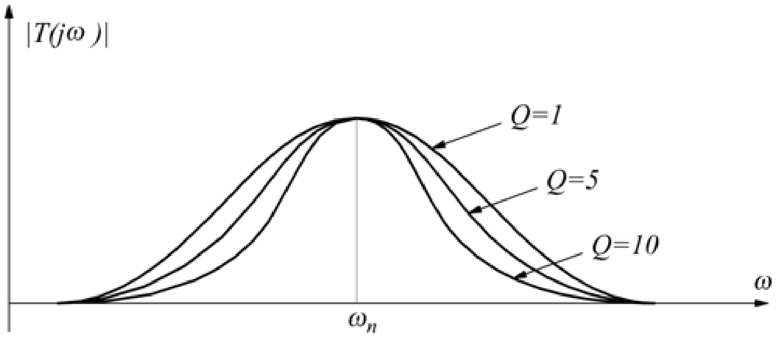
$$\boxed{T(s) = \frac{K \cdot s\frac{\omega_n}{Q}}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n}} \qquad \textbf{[XII]}$$

Questa funzione ha uno zero due poli complessi coniugati per Q>1/2 In regime sinusoidale puro si ha:

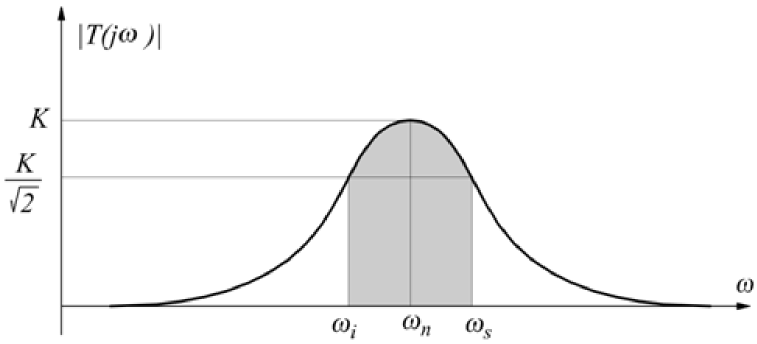
$$|T(j\omega)| = \frac{K\omega\frac{\omega_n}{Q}}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)+\left(\frac{\omega\cdot\omega_n}{Q}\right)^2}} = \frac{K\frac{\omega_n}{Q}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_n}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+\frac{1}{Q^2}}} \qquad \textbf{[XIII]}$$

$$\phi = 90° - atg\frac{\omega\cdot\omega_n}{Q\cdot(\omega_n^2-\omega^2)} = 90° - atg\frac{1}{Q\cdot\left(\frac{\omega_n}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \qquad \textbf{[XIV]}$$

In questo disegno, la risposta in frequenza al variare di Q.



Il modulo, presenta un valore massimo per ω= ω_n che vale: $|T(j\omega)|_{max} = K$



Fissato Q si ha una unica curva, da cui si desumono le pulsazioni di taglio inferiore ω_i e superiore s come i valori di per i quali il guadagno si abbassa dal valore massimo K al valore $\frac{K}{\sqrt{2}}$ .Quindi:

$$\frac{K\frac{\omega_n}{Q}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_n}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+\frac{1}{Q^2}}}=\frac{K}{\sqrt{2}} \longrightarrow \begin{cases} \omega_i = \frac{\omega_n}{2Q}\cdot(\sqrt{1+4Q^2}-1) \\ \omega_s = \frac{\omega_n}{2Q}\cdot(\sqrt{1+4Q^2}+1) \end{cases}$$

si hanno le rispettive frequenze $\begin{cases} f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \\ f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \end{cases}$

La larghezza di banda è $B=f_s-f_i$ sottraendo membro a membro

$$\omega_s - \omega_i = \frac{\omega_n}{Q} \longrightarrow f_s - f_i = \frac{f_0}{Q} \longrightarrow B = \frac{f_0}{Q}$$

con $f_0 = \frac{\omega_n}{2\pi}$ frequenza di centro banda.

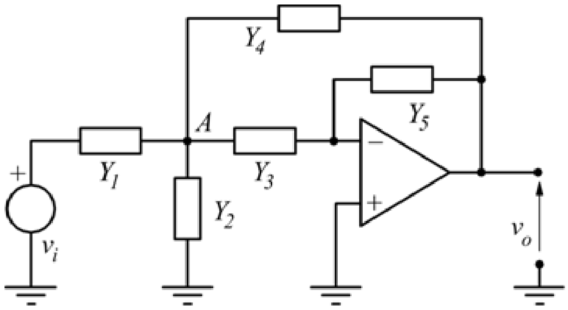
Filtri a banda piatta

Se Q<1/2 i poli diventano reali e distinti e la risposta in frequenza presenta una banda piatta a guadagno costante compresa fra $\omega_i=|p_1|$ e $\omega_i=|p_2|$. La pendenza di $|T(j\omega)|$ fuori banda è di 20dB/dec.

Configurazioni per filtri di II° ordine

Le configurazioni fondamentali sono due:

Filtro a reazione multipla



Applicando il teorema di Millman

$$V_A = \frac{V_i Y_1 + V_o Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} \qquad \textbf{[XV]}$$

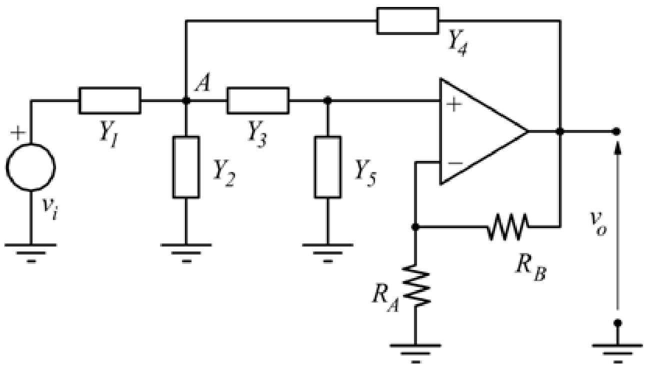
ma l'operazionale è in configurazione invertente, per cui:

$$V_o = -\frac{1/Y_5}{1/Y_3} V_A \longrightarrow V_o = -\frac{Y_3}{Y_5} V_A \qquad \textbf{[XVI]}$$

Sostituendo la [XV] nella [XVI]

$$T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4} \qquad \textbf{[XVII]}$$

Filtro VCVS



Applicando il teorema di Millman

$$V_A = \frac{V_i Y_1 + V_o Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_4 + \frac{Y_3 + Y_5}{Y_3 Y_5}} \qquad \textbf{[XVIII]}$$

Infatti le due ammettenze Y_3 ed Y_5 viste dal nodo A sono in serie. La tensione sul morsetto non invertente è:

$$V^+ = V_A \frac{1/Y_5}{\frac{1}{Y_5} + \frac{1}{Y_3}} = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_5} V_A \qquad \textbf{[XIX]}$$

L'amplificatore operazionale è in configurazione non invertente e per esso vale la:

$$V_o = V^+ \left(1 + \frac{R_B}{R_A} \right) \qquad \textbf{[XX]}$$

Per la [XIX] la [XX] diventa.

$$V_o = \frac{Y_3}{Y_3 + Y_5}\left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \cdot V_A \qquad \textbf{[XXI]}$$

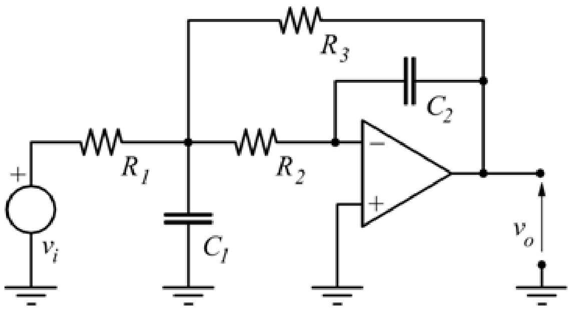
Sostituendo la [XVIII] al posto di V_A avremo:

$$T(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{HY_1Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3[Y_1 + Y_2 + Y_4(1 - H)]} \qquad \textbf{[XII]}$$

con $H = 1 + \frac{R_B}{R_A}$

è comodo rappresentarli in funzione delle ammettenze Y (1/Z). I filtri VCVS (Voltage Controlled Voltage Source) sono così denominati per la reazione negativa controllata in tensione.

Filtro passa-basso a reazione multipla



equazione principale: $$T(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

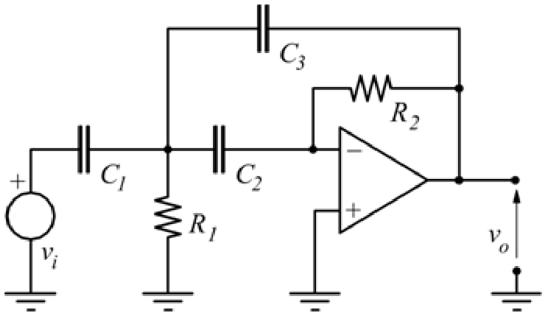
equazione circuitale $$T(s) = \frac{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + \frac{s}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{R_2R_3C_1C_2}}$$ **da cui**

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_2R_3C_1C_2}} \qquad K = -\frac{R_3}{R_1} \qquad \xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\left(\sqrt{\frac{R_2}{R_3}} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \frac{\sqrt{R_2R_3}}{R_1}\right)$$

In fase di progetto, si fissano arbitrariamente K ω_n Q e C_2, ottenendo:

$$R_3 = \frac{1}{2Q\omega_nC_2} \qquad R_2 = \frac{R_3}{|K| + 1} \qquad R_1 = \frac{R_3}{|K|} \qquad C_1 = 4C_2Q^2(|K| + 1)$$

Filtro passa-alto a reazione multipla



equazione principale: $$T(s) = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

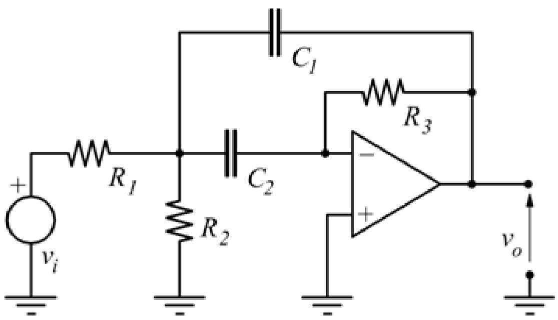
equazione circuitale $$T(s)=\frac{\frac{C_1}{C_3}s^2}{s^2+\frac{s}{R_2}\left(\frac{C_1}{C_2C_3}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)+\frac{1}{R_1R_2C_2C_3}}$$ si ottiene

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_2C_3}} \qquad K=-\frac{C_1}{C_3} \qquad \xi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_2C_3}}+\sqrt{\frac{C_2}{C_3}}+\sqrt{\frac{C_3}{C_2}}\right)$$

Per il progetto, si fissano arbitrariamente K ω_n Q e C_1=C_2, ottenendo:

$$C_3=\frac{C_1}{|K|} \qquad R_1=\frac{1}{Q\omega_n\left(2+\frac{1}{|K|}\right)\cdot C_1} \qquad R_2=\frac{Q|K|\left(2+\frac{1}{|K|}\right)}{\omega_n C_1}$$

Filtro passa-banda a reazione multipla



Equazione principale $$T(s)=\frac{K\cdot s\frac{\omega_n}{Q}}{s^2+\frac{\omega_n}{Q}s+\omega_n}$$

Equazione circuitale $$T(s)=-\frac{s\frac{1}{R_1C_1}}{s^2+\frac{1}{R_3}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)s+\frac{1}{R_3C_1C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$$ **ottenendo**

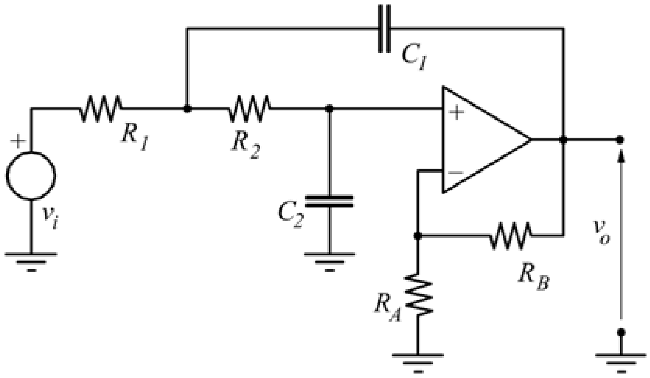
$$\omega_n=\sqrt{\frac{1}{R_3C_1C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} \qquad K=-\frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{1}{1+C_1/C_2}$$

$$Q=\frac{\omega_n R_3C_1C_2}{C_1+C_2} \qquad B=\frac{f_0}{Q}=\frac{\omega_n}{2\pi Q}=\frac{C_1+C_2}{2\pi\cdot R_3C_1C_2}$$

Per il progetto, si fissati K ω_n Q e C_1=C_2=C si ottiene:

$$R_1=\frac{Q}{|K|\omega_n C_1} \qquad R_3=2R_1|K| \qquad R_2=\frac{R_3}{2(2Q^2-|K|)}$$

Filtro passa-basso VCVS



equazione principale: $$T(s)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{s^2+2s\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

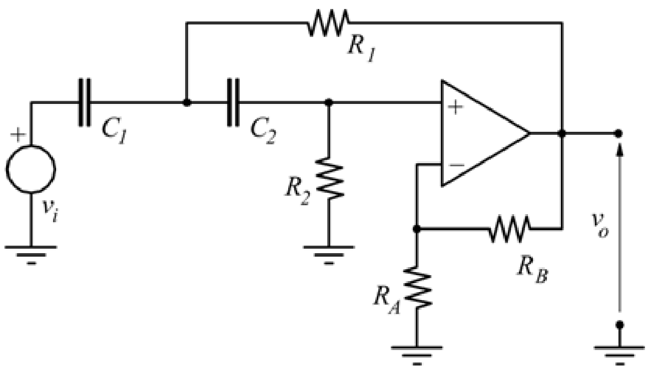
equazione circuitale $$T(s)=\frac{K\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2+s\left(\dfrac{1}{R_1C_1}+\dfrac{1}{R_2C_1}+\dfrac{1-K}{R_2C_2}\right)+\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}\qquad K=1+\frac{R_B}{R_A}\qquad \xi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}+\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}+(1-K)\sqrt{\frac{R_1C_1}{R_2C_2}}\right)$$

Per il progetto, si fissati K ω_n Q C_1 ed R_A si ottiene:

$$R_B=(K-1)\cdot R_A\qquad R_1=\frac{2Q}{\omega_nC_1}\qquad R_2=\frac{1}{2Q\omega_nC_1\left(\dfrac{R_B}{R_A}+\dfrac{1}{Q^2}\right)}\qquad C_2=\left(\frac{R_B}{R_A}+\frac{1}{Q^2}\right)\cdot C_1$$

FILTRO PASSA-ALTO VCVS



equazione principale: $$T(s)=\frac{K\cdot s^2}{s^2+2s\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

equazione circuitale $$T(s)=\frac{K\cdot s^2}{s^2+s\left(\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{1}{R_2C_1}+\dfrac{1-K}{R_1C_1}\right)+\dfrac{1}{R_1R_2C_2C_3}}$$

$$K=1+\frac{R_B}{R_A}\qquad \omega_n=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_2C_3}}\qquad \xi=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_1C_1}{R_2C_2}}+\sqrt{\frac{R_1C_2}{R_2C_1}}+(1-K)\sqrt{\frac{R_2C_2}{R_1C_1}}\right)$$

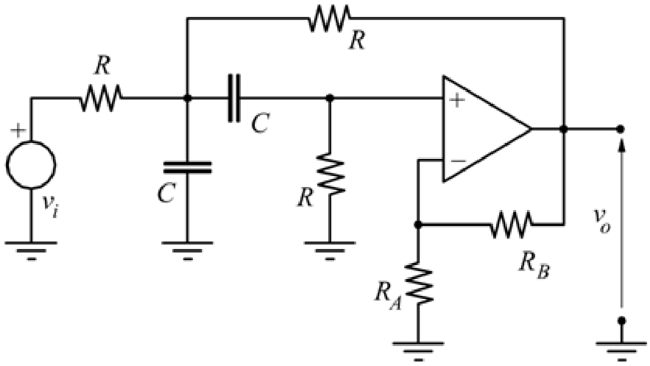
Per il progetto fissati ω_n K Q C_1=C_2=C ed R_A.

$$R_B = (K-1)R_A \qquad R_1 = \frac{\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 8(K-1)}}{4\omega_n C} \qquad R_2 = \frac{4}{\omega_n C\left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 8(K-1)}\right)}$$

Nel caso particolare in cui tutti i componenti siano uguali R_1=R_2=R e C_1=C_2=C si ha:

$$\omega_n = \frac{1}{RC} \qquad K = 1 + \frac{R_B}{R_A} \qquad \xi = \frac{3-K}{2}$$

Filtro passa-banda VCVS



Equazione principale $$T(s) = \frac{K \cdot s\frac{\omega_n}{Q}}{s^2 + \frac{\omega_n}{Q}s + \omega_n}$$

Equazione circuitale $$T(s) = -\frac{H\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{4-H}{RC}s + \frac{2}{(RC)^2}}$$

$$H = 1 + \frac{R_B}{R_A} \qquad \omega_n = \frac{\sqrt{2}}{RC} \qquad Q = \frac{\sqrt{2}}{4-H} \qquad K = \frac{H}{4-H}$$

Per il progetto, si fissati ω_n Q C ed R_A si ottiene:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\omega_n C} \qquad H = \frac{4Q - \sqrt{2}}{Q} \qquad R_B = (H-1)R_A \qquad K = \frac{H}{4-H}$$