

CAPITOLO 3 - CAMPO ELETTROMAGNETICO

In questo capitolo si affrontano fenomeni nei quali i tre campi fisici, campi di conduzione elettrico e magnetico, interagiscono tra loro e quindi vanno considerati simultaneamente. Le interazioni avvengono di regola per tramite delle relazioni del mezzo. Ne segue che le caratteristiche del mezzo materiale in cui i fenomeni si svolgono, come caso particolare anche il vuoto, acquistano importanza determinante.

I problemi di elettromagnetismo si possono generalmente affrontare in due modi equivalenti: facendo uso delle relazioni integrali oppure delle equazioni differenziali di Maxwell.

Si riepilogano le relazioni del mezzo normale e le equazioni dei campi in forma integrale e differenziale.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{campo di conduzione elettrica}) \quad (3.1)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{campo elettrico}) \quad (3.2)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{campo magnetico}) \quad (3.3)$$

$$e_c = -\frac{d\psi_c}{dt} \quad \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \text{Legge dell'induzione elettromagnetica} \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$m_c = i_{tot} \quad \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad \text{Legge di Ampère} \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\psi_\Sigma = 0 \quad \oint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{Legge di Gauss magnetica} \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\psi_{D\Sigma} = q_\tau \quad \oint_\Sigma \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_\tau \rho_v d\tau \quad \text{Legge di Gauss} \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\tau}{dt} \quad \oint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_\tau \rho_v d\tau \quad \text{Conservazione della carica} \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

Soluzioni di regime

Le equazioni dell'elettromagnetismo sono lineari tempo-varianti per domini di integrazione varianti e tempo-invarianti nei casi più frequenti di domini di integrazione costanti.

Le equazioni lineari tempo-invarianti presentano a regime soluzioni dello stesso tipo delle forzanti esterne. In particolare per forzanti sinusoidali nel tempo la soluzione di regime (l'integrale forzato) è sinusoidale isofrequenziale con la forzante ed è lecita l'algebra dei fasori.

Il fasore è una trasformazione di variabili sinusoidali nel tempo: si può applicare alle componenti di un campo vettoriale, quindi al campo vettoriale stesso.

$$\vec{F}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[\vec{F} e^{j\omega t} \right]$$

Le relazioni di regime nei fasori si ottengono dalle equazioni dei campi con la sostituzione $\frac{d}{dt} = j\omega$

Le derivate temporali diventano termini finiti e le equazioni differenziali alle derivate parziali si trasformano in equazioni differenziali nelle sole coordinate spaziali.

Sempre per la linearità vale lo sviluppo di Fourier di funzioni periodiche e la sovrapposizione di regimi sinusoidali.

TEOREMA DI POYNTING

Il Teorema di Poynting coinvolge gli aspetti energetici del campo elettromagnetico; è il teorema di conservazione dell'energia nell'ambito elettromagnetico.

Si definisce vettore di Poynting il seguente campo vettoriale

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.9)$$

Il vettore di Poynting ha le dimensioni e il significato di densità di potenza. L'unità di misura è W/m^2 .

Il teorema di Poynting, qui dato senza dimostrazione, afferma che, considerato un volume finito, all'interno del volume la potenza fornita al campo di corrente da campi elettromotori di natura non elettrica eguaglia la potenza dissipata (convertita in calore) dal campo di conduzione, l'aumento di energia dei campi elettrico e magnetico ed il flusso del vettore di Poynting uscente dalla superficie chiusa che delimita il volume. In formula

$$\int_{\tau} \vec{E}' \cdot \vec{J} d\tau = \int_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{J} d\tau + \int_{\tau} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\tau + \oint_{\Sigma} \vec{E} \times \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (3.10)$$

Il flusso del vettore di Poynting è quindi necessario per completare il bilancio energetico.

Mediante il teorema della divergenza, si può formulare il teorema di Poynting in forma locale

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}$$

o anche

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{J^2}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial t} (w_{Msp} + w_{Esp}) + \nabla \cdot \vec{S}$$

Il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie aperta è interpretabile come potenza del campo elettromagnetico transitante attraverso la superficie. Quindi il vettore stesso (3.9) è interpretato come potenza specifica locale transitante supportata dal campo elettromagnetico. Ciò è particolarmente significativo nella potenza irradiata con onde elettromagnetiche.

$$p_s(t) = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

Il flusso di potenza di Poynting appare a tutte le frequenze e anche in regime stazionario. Rappresenta infatti la potenza complessiva di tipo elettromagnetico che transita attraverso la superficie di contorno. Questa può assumere tre forme tipiche: per conduzione, convezione ed irraggiamento. La potenza di conduzione è dovuta alle usuali correnti di conduzione, spesso esprimibile nella forma $p=vi$. La convezione riguarda corpi macroscopici carichi in movimento che attraversano la superficie. La potenza di tipo irradiato è sostenuta dal solo campo elettromagnetico nel fenomeno della propagazione di onde elettromagnetiche in mezzi isolanti.

Conduttore percorso da corrente costante

Consideriamo un conduttore cilindrico percorso da corrente costante I e caratterizzato da resistenza per unità di lunghezza R_ℓ . Il campo magnetico all'esterno è tangenziale e il

modulo vale con Biot-Savart $H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}$

Il campo elettrico all'interno e all'esterno ha la direzione della corrente ed ha lo stesso valore in tutti i punti $E = R_\ell I$.

All'esterno del conduttore i campi elettrico e magnetico sono ortogonali. Il vettore di Poynting (3.9) è radiale, diretto verso l'interno e di modulo $S = \frac{R_\ell I^2}{2\pi r}$

Il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie laterale cilindrica di raggio r non dipende dal raggio ed è pari alla potenza dissipata nel tratto corrispondente del conduttore. Il risultato integrale è in accordo con il Teorema di Poynting. Il fatto che il flusso di potenza appaia localizzato nel campo all'esterno e non proveniente dai morsetti di estremità del conduttore indica la convenzionalità delle relazioni locali.

EQUAZIONE DI RILASSAMENTO

Si considerano il campo di conduzione ed il campo elettrico. Si vuole studiare il movimento delle cariche all'interno di un conduttore dovuto alle interazioni di repulsione tra le cariche stesse. Dalle (3.1) e (3.2) si ottiene

$$\vec{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{D} \quad (3.11)$$

Si considera il flusso di ambo i termini della (3.11) su una superficie chiusa Σ che racchiude il volume τ . Per mezzo omogeneo in una regione comprendente la superficie (conducibilità e permittività costanti)

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

Per la legge di Gauss (3.7) e la conservazione della carica (3.8) si perviene alla equazione differenziale omogenea nella carica contenuta nel volume

$$\frac{dq_{\tau}}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} q_{\tau} = 0 \quad (3.12)$$

Per geometria invariante vale anche la relazione equivalente nella densità di carica

$$\frac{d\rho_v}{dt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_v = 0 \quad (3.13)$$

La (3.13) governa la distribuzione di carica in un materiale conduttore. E' una equazione differenziale lineare del primo ordine che afferma che la densità di carica all'interno del conduttore si annulla con legge esponenziale di costante di tempo (costante di tempo di rilassamento) $\tau_{ril} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$.

Per gli usuali conduttori la costante di tempo di rilassamento è piccolissima. Per il rame con $\rho = 2 \cdot 10^{-8} \Omega m$ si trova $\tau_{ril} \approx 2 \cdot 10^{-19} s$.

Le (20-21) valgono per mezzo omogeneo. Le discontinuità o variazioni del mezzo ne costituiscono le condizioni al contorno. Un'analisi più approfondita del fenomeno indica che le cariche libere in un conduttore si riorganizzano velocemente in modo da mantenere densità di carica non nulla solo sulla superficie del conduttore.

Corrente totale in un conduttore

In un conduttore percorso da corrente vale la (3.11). La densità di corrente totale in regime sinusoidale assume la espressione

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = (1 + j\omega\tau_{ril}) \vec{J}$$

Solo per frequenze elevatissime, di periodo confrontabile con il tempo di rilassamento, la corrente di spostamento è significativa. Per frequenze inferiori la corrente totale si confonde con la corrente di conduzione.

CORRENTI PARASSITE

Per la legge dell'induzione elettromagnetica un campo magnetico variabile genera forze elettromotrici lungo percorsi chiusi su piani normali alla direzione del campo. Se il mezzo in cui si trova il campo magnetico è un conduttore elettrico, il fenomeno dà luogo ad un campo di corrente nel materiale (correnti parassite). Questa origina perdite per effetto Joule nel materiale.

In regime sinusoidale le f.e.m. E su spire chiuse sono proporzionali all'area delle spire, alla frequenza e al modulo dell'induzione. Le perdite medie in un circuito elettrico sono del tipo E^2 / R . Considerata la conducibilità σ del materiale, le perdite specifiche per correnti parassite sono quindi

$$P_{sp} \equiv \sigma f^2 B^2$$

La costante di proporzionalità dipende dalla forma geometrica della struttura magnetica.

Si perviene con facilità ad un risultato quantitativo nel seguente caso.

Si consideri la Fig. 3.1 che mostra una sezione di materiale conduttore di spessore b , molto minore delle altre dimensioni, interessato da un campo B uniforme in direzione ortogonale alla sezione. In questa situazione è possibile, sotto ipotesi semplificative, ottenere una espressione precisa delle perdite specifiche per correnti parassite.

Il campo elettrico è legato all'induzione dalla relazione (3.4) e il campo di corrente è proporzionale al campo elettrico secondo la (3.1).

Se la dimensione trasversale è indefinita, per simmetria i campi di conduzione ed elettrico hanno l'andamento indicato in Fig. 3.1 e l'intensità è funzione della sola variabile spaziale x (per i versi si è tenuto conto del segno della (3.4)). La forza elettromotrice e lungo la linea chiusa tratteggiata di dimensione trasversale generica ℓ vale

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\ell E$$

Per la legge dell'induzione (3.4) la forza elettromotrice è anche uguale a $e = 2\ell x \frac{\partial B}{\partial t}$

quindi nei moduli e per campo uniforme $E = \frac{dB}{dt} x$

Le perdite specifiche locali sono

$$p_{sp}(x, t) = \sigma E^2 = \sigma \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 x^2$$

Le perdite medie rispetto alla coordinata spaziale risultano

$$p_{sp}(t) = \frac{2\sigma}{b} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \int_0^{b/2} x^2 dx = \frac{\sigma b^2}{12} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2$$

Ipotizzata l'induzione sinusoidale nel tempo con pulsazione ω e valore massimo B_M , le perdite specifiche per correnti parassite mediate nel periodo risultano

$$P_{sp} = \frac{\sigma b^2}{12} \frac{1}{T} \int_T \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt = \frac{\sigma b^2 \omega^2 B_M^2}{24} = \frac{\pi^2}{6} (\sigma b^2 f^2 B_M^2)$$

La formula trovata vale per spessore del conduttore piccolo rispetto alle altre dimensioni e correnti indotte sufficientemente piccole da non alterare il valore locale dell'induzione magnetica.

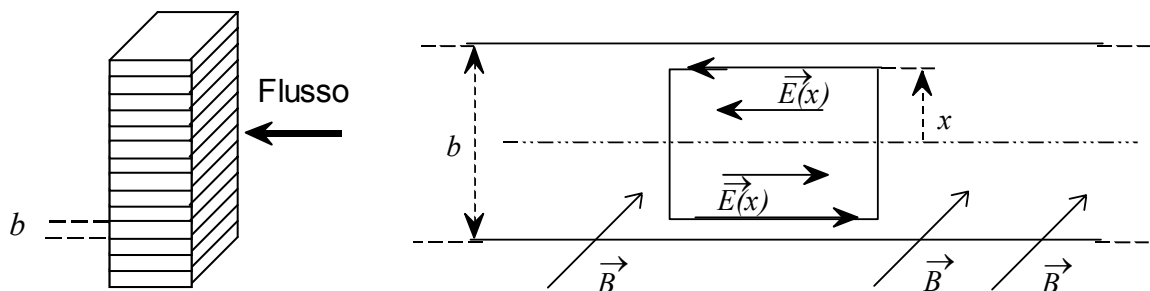


Fig. 3.1. Correnti parassite in un conduttore laminato.

Il fenomeno studiato si presenta nel circuito magnetico (in ferro o altro materiale ferromagnetico) delle macchine e delle apparecchiature elettriche. Nel materiale ferromagnetico alle correnti parassite si aggiungono le perdite per isteresi, complessivamente al fenomeno si dà il nome di perdite nel ferro.

Per limitare le perdite per correnti parassite, il materiale magnetico è usualmente costituito da pacchi di lamierini di piccolo spessore b posti in direzione longitudinale al campo magnetico (in modo che il campo non attraversi le superfici di separazione tra i lamierini). Le spire indotte, normali al campo, sono costrette all'interno del singolo lamierino dal moderato isolamento elettrico tra i lamierini.

Circuito equivalente

La rappresentazione circuitale elettrica dei fenomeni dissipativi illustrati è in generale complessa.

Per un circuito magnetico concatenato con un solo circuito elettrico valgono comunque le seguenti considerazioni approssimate. Il flusso concatenato ai morsetti elettrici è proporzionale all'induzione nel circuito magnetico. In regime sinusoidale il valore efficace della tensione è proporzionale al valore efficace del flusso concatenato (la dipendenza dalla frequenza non entra in gioco a frequenza costante), quindi le perdite nel ferro, proporzionali al quadrato dell'induzione, sono anche proporzionali al quadrato della tensione ai morsetti. Vale pertanto il circuito equivalente di Fig. 3.2 nel quale in parallelo all'induttanza risultante

dal campo magnetico è inserita una resistenza. Con un opportuno valore di conduttanza, la potenza media assorbita dal resistore, proporzionale al quadrato della tensione, corrisponde in media alle perdite nel ferro.

La presenza di fenomeni dissipativi fa sì che il sistema magnetico non sia più conservativo. Non è più lecita quindi la definizione dell'energia sul sistema complessivo. Ma l'aver separato nel modello i fenomeni dissipativi consente di potere ancora considerare l'energia della parte conservativa del sistema.

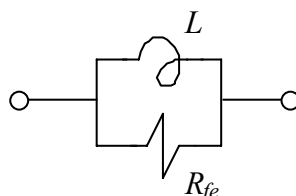


Fig. 3.2. Circuito equivalente di un induttore con perdite nel ferro.

ADDENSAMENTO DI CORRENTE (EFFETTO PELLE)

Il fenomeno è dovuto all'interazione tra il campo di conduzione ed il campo magnetico generato dalle stesse correnti su cui agisce. In questo fenomeno sono alterati sia il campo di conduzione che il campo magnetico. Il risultato è una distribuzione non uniforme di densità di corrente nei conduttori, quindi un aumento di resistenza. La corrente tende ad addensarsi in prossimità del bordo esterno dei conduttori, da cui il nome di effetto pelle.

Effetto pelle totale

Consideriamo la geometria semplice a simmetria cilindrica costituita da una superficie piana di separazione tra un semispazio conduttore e un semispazio isolante. Rappresenta un conduttore elettrico percorso da corrente in direzione assiale e di dimensioni molto grandi (il significato sarà chiarito in seguito).

Data la struttura indefinita in due direzioni, tutti i campi sono funzioni della sola distanza y dal piano, oltre che del tempo. Ciò rende il problema monodimensionale.

Sia una densità di corrente $J(y,t)$ nella direzione indicata in Fig. 3.3. Per simmetria il campo elettrico $E(y,t)$ è parallelo al campo di corrente ed il campo magnetico $H(y,t)$ è ortogonale alla corrente.

Si applica la legge di Ampère alla linea chiusa LH tra i livelli y e $y+dy$. Si eguaglia l'integrale del campo H lungo la linea alla corrente concatenata. Si trascura la corrente di spostamento per quanto visto a proposito del rilassamento. Si ha

$$J = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (3.14)$$

Si applica la legge dell'induzione alla linea chiusa LE tra i livelli y e $y+dy$. Si eguaglia l'integrale del campo E lungo la linea all'opposto della derivata del flusso magnetico concatenato.

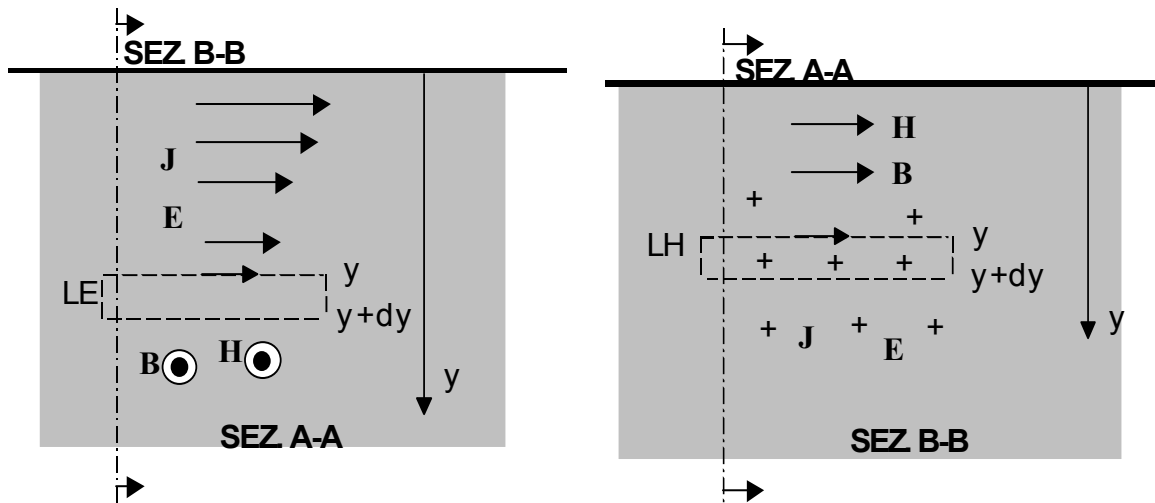


Fig. 3.3. Bordo di un conduttore elettrico indefinito.

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3.15)$$

Le due relazioni si legano mediante le relazioni del mezzo (3.1) e (3.3). Per eliminazione si ottiene la seguente equazione alle derivate parziali in un'unica variabile (per tutte le variabili si trova la stessa forma).

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = \sigma\mu \frac{\partial J}{\partial t} \quad (3.16)$$

Si cerca la soluzione di regime in sinusoidale nei fasori. Si ottiene la equazione alle derivate totali a coefficienti complessi, integrabile imponendo le condizioni al contorno.

$$\frac{d^2 \bar{J}(y)}{dy^2} - j\omega\sigma\mu \bar{J}(y) = 0$$

La soluzione generale è

$$\bar{J}(y) = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}$$

$$\text{con } k = \sqrt{j\omega\sigma\mu} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \frac{1+j}{\delta} \quad (3.17)$$

Il parametro dipendente dalla frequenza e dal mezzo $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$ prende il nome di spessore di penetrazione.

Imponendo che il campo si annulli per $y \rightarrow \infty$ si trova

$$\bar{J}(y) = \bar{J}_0 e^{-ky} = \bar{J}_0 e^{-\left(\frac{y}{\delta} + j\frac{y}{\delta}\right)} \quad \bar{J}_0 = \bar{J}(0) \quad (3.18)$$

La funzione è costituita da un esponenziale ad esponente reale negativo che determina la attenuazione dell'intensità del campo con la profondità e da un esponente immaginario che determina una rotazione di fase. Lo spessore di penetrazione è la costante di smorzamento (analoga alla costante di tempo).

Correliamo l'andamento dato alla corrente totale per unità di lunghezza in direzione trasversale

$$\bar{I}_\ell = \int_0^\infty \bar{J}(y) dy = \bar{J}_0 \frac{\delta}{1+j} = \frac{\bar{J}_0}{k} \quad (3.19)$$

Ciò consente di riformulare la (3.18) come

$$\bar{J}(y) = \bar{I}_\ell \frac{1+j}{\delta} e^{-\left(\frac{y}{\delta} + j\frac{y}{\delta}\right)} = k \bar{I}_\ell e^{-ky} \quad (3.20)$$

Il significato dello spessore di penetrazione si rivela considerando la potenza dissipata dal campo di corrente nel conduttore. La potenza specifica media nel tempo è

$$P_{sp} = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{J_0^2}{\sigma} e^{-\frac{2y}{\delta}}$$

La potenza per unità di lunghezza in direzione trasversale e longitudinale (potenza per unità di superficie del conduttore indefinito) è

$$P_s = \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty J^2(y) dy = \frac{\delta}{2\sigma} J_0^2 = \frac{I_\ell^2}{\sigma \delta}$$

Esprimendo la potenza come $P_s = R_s I_\ell^2$ si ottiene l'espressione della resistenza di superficie equivalente

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \quad (3.21)$$

La resistenza di superficie è la resistenza (in Ω) corrispondente ad una regione quadrata di superficie. La resistenza effettiva del conduttore si ottiene dalla resistenza di superficie (3.21) moltiplicata per la lunghezza e divisa per la larghezza della sezione di passaggio.

La resistenza (3.21) della distribuzione di corrente (3.20) equivale alla resistenza di una distribuzione uniforme per una profondità pari allo spessore di penetrazione.

La resistenza è proporzionale alla radice quadrata della frequenza.

Anche il campo magnetico obbedisce ad una relazione formalmente uguale alla (3.16). Imponendo simili condizioni al contorno, si trova

$$\bar{H}(y) = \bar{H}_0 e^{-\left(\frac{y}{\delta} + j\frac{y}{\delta}\right)} \quad (3.22)$$

La energia magnetica specifica media nel tempo è $W_{sp} = \frac{\mu H^2}{2} = \mu \frac{H_0^2}{2} e^{-\frac{2y}{\delta}}$.

La energia per unità di superficie all'interno del conduttore indefinito è

$$W_s = \frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} H^2(y) dy = \frac{\mu \delta}{4} H_0^2$$

La relazione tra il campo di conduzione ed il campo magnetico è in tutti i punti la (3.14). Dal confronto fra la (3.22) e la (3.18) si determina la condizione al contorno del campo magnetico.

$$\bar{H}_0 = \frac{\delta}{1+j} \bar{J}_0 = \bar{I}_\ell$$

Esprimendo la energia magnetica come $W_s = \frac{1}{2} L_s I_\ell^2$ si ottiene l'espressione della induttanza di superficie equivalente

$$L_s = \frac{\mu \delta}{2} \quad (3.23)$$

La (3.23) è il risultato dell'integrazione del campo magnetico all'interno del conduttore. E' quindi l'induttanza interna.

L'induttanza (3.23) è inversamente proporzionale alla radice quadrata della frequenza.

I risultati ottenuti valgono in prossimità della superficie di un conduttore percorso da corrente, se le dimensioni trasversali del conduttore sono molto maggiori dello spessore di penetrazione. Per la precisione, devono essere soddisfatte le due condizioni: 1) lo spessore del conduttore è molto maggiore dello spessore di penetrazione; 2) il raggio di curvatura della superficie è molto maggiore dello spessore di penetrazione. In tale caso si è in presenza di effetto pelle totale (o massimo).

Nella condizione di effetto pelle totale vale la relazione notevole tra le (3.21) e (3.23) che la reattanza è uguale alla resistenza. Infatti

$$R_s = \omega L_s$$

La impedenza di superficie è

$$\bar{Z}_s = R_s + j\omega L_s = (1+j)R_s = \frac{1+j}{\sigma \delta}$$

Sotto l'ipotesi di effetto pelle totale, un conduttore cilindrico di sezione retta di forma generica caratterizzata da un perimetro p presenta resistenza, induttanza interna e impedenza per unità di lunghezza

$$R_\ell = \frac{1}{\sigma \delta p} \qquad L_\ell = \frac{\mu \delta}{2p} \qquad (3.24)$$

$$\bar{Z}_\ell = R_\ell + j\omega L_\ell = (1 + j)R_\ell = \frac{1 + j}{\sigma \delta p} \qquad (3.25)$$

Spessore di penetrazione a frequenza industriale

Per il rame ($\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $\rho = 2 \cdot 10^{-8} \Omega m$) a $f=50 \text{ Hz}$ risulta $\delta = 10 \text{ mm}$.

Per l'alluminio ($\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $\rho = 3,4 \cdot 10^{-8} \Omega m$) a $f=50 \text{ Hz}$ risulta $\delta = 13 \text{ mm}$.

Conduttore di sezione circolare

La soluzione rigorosa della distribuzione di corrente in un conduttore di sezione circolare richiede conoscenze matematiche avanzate.

E' sufficiente per considerazioni qualitative considerare i due casi estremi di distribuzione uniforme e di effetto pelle totale.

La distribuzione uniforme, valida in continua e per spessore di penetrazione molto maggiore del raggio del conduttore, fornisce la resistenza e induttanza interna per unità di lunghezza

$$R_{\ell 0} = \frac{1}{\pi r^2 \sigma} \qquad L_{\ell 0} = \frac{\mu}{8\pi}$$

Per un conduttore cilindrico di raggio r molto maggiore dello spessore di penetrazione, il perimetro è $p = 2\pi r$. Valgono le espressioni asintotiche in funzione della frequenza

$$R_\ell(f) = \frac{1}{2\pi r \sigma \delta} \qquad L_\ell(f) = \frac{\mu \delta}{4\pi r} \qquad (3.26)$$

Valgono i rapporti notevoli

$$\frac{R_\ell(f)}{R_{\ell 0}} = \frac{r}{2\delta} \qquad \frac{L_\ell(f)}{L_{\ell 0}} = \frac{2\delta}{r} \qquad (3.27)$$

Per effetto pelle elevato l'aumento percentuale di resistenza è pari alla diminuzione percentuale di induttanza.

LINEA DI TRASMISSIONE

Chiamiamo linea di trasmissione una struttura a simmetria cilindrica, cioè che si ripete identica su ogni piano ortogonale (sezione) ad una direzione privilegiata, che costituisce la direzione della linea, con le seguenti caratteristiche.

E' costituita da due conduttori elettrici percorsi da corrente (o riconducibile a due conduttori equivalenti). La somma delle correnti valutata su una sezione è nulla. La densità di corrente nei conduttori è sempre nella direzione della linea. I campi elettrico e magnetico all'esterno dei conduttori sono ortogonali alla direzione della linea. Il mezzo è omogeneo, lineare ed isotropo.

Rientrano in questa casistica sia linee di potenza che di segnale

- linea bifilare
- cavo coassiale
- catenaria di alimentazione ferroviaria con richiusura sul binario e nel terreno
- linea trifase nei vettori spaziali
- piste di circuiti stampati (microstrisce)

L'assunto che all'esterno dei conduttori i campi giacciono sul piano perpendicolare alla linea ha importanti conseguenze. Sul piano normale il campo elettrico è irrotazionale (il flusso concatenato con una spira sul piano è nullo) e il campo magnetico dipende solo dalla corrente di conduzione. Su ogni piano normale si può quindi definire la differenza di potenziale tra i conduttori ed i parametri induttivi e capacitivi calcolati in ipotesi di quasi stazionarietà sono ancora validi.

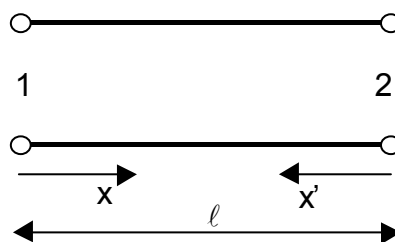


Fig. 3.4. Linea di trasmissione.

Ogni sezione trasversale identifica una posizione lungo la linea misurata dalla coordinata x . La sezione considerata è caratterizzata da un valore di corrente $i(x,t)$ e da una tensione tra i conduttori $v(x,t)$.

La linea è caratterizzata da quattro parametri per unità di lunghezza (parametri specifici):

Parametri longitudinali: resistenza e induttanza.

Parametri trasversali: conduttanza e capacità.

Un tratto infinitesimo di linea ha il circuito equivalente di Fig. 3.5.

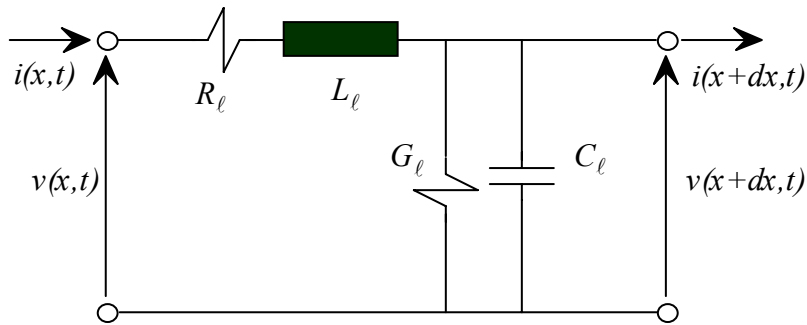


Fig. 3.5. Tratto elementare di linea di lunghezza dx .

La tensione e la corrente rispondono alle equazioni differenziali alle derivate parziali

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R_\ell i + L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = G_\ell v + C_\ell \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (3.28)$$

Si prosegue in regime sinusoidale nei fasori. Le due precedenti diventano equazioni alle derivate spaziali nella variabile indipendente x .

$$\frac{d\bar{V}}{dx} = -\bar{Z}_\ell \bar{I} \qquad \bar{Z}_\ell = R_\ell + j\omega L_\ell \qquad (3.29)$$

$$\frac{d\bar{I}}{dx} = -\bar{Y}_\ell \bar{V} \qquad \bar{Y}_\ell = G_\ell + j\omega C_\ell \qquad (3.30)$$

Dalle precedenti per eliminazione di variabili si ottengono le due equazioni formalmente identiche, dette equazioni della linea

$$\frac{d^2\bar{V}}{dx^2} = \bar{Z}_\ell \bar{Y}_\ell \bar{V} \qquad \frac{d^2\bar{I}}{dx^2} = \bar{Z}_\ell \bar{Y}_\ell \bar{I} \qquad (3.31)$$

La soluzione generale è

$$\begin{aligned} \bar{V}(x) &= \bar{V}_{D1} e^{-kx} + \bar{V}_{I1} e^{kx} \\ \bar{I}(x) &= \bar{I}_{D1} e^{-kx} + \bar{I}_{I1} e^{kx} \end{aligned} \qquad (3.32)$$

$$\text{con } k = \sqrt{\bar{Z}_\ell \bar{Y}_\ell} \qquad (3.33)$$

Le (3.32) sono la somma di una onda diretta, che si propaga e si attenua nel verso delle x positive, e di una onda inversa che si propaga e si attenua nel verso delle x negative.

Parametri caratteristici della linea

$$k = \sqrt{(R_\ell + j\omega L_\ell)(G_\ell + j\omega C_\ell)} = \sqrt{(R_\ell G_\ell - \omega^2 L_\ell C_\ell) + j\omega(G_\ell L_\ell + R_\ell C_\ell)} = \alpha + j\beta$$

α costante di attenuazione

β costante di fase

$$\text{Impedenza caratteristica } \bar{Z}_C = \sqrt{\frac{\bar{Z}_\ell}{\bar{Y}_\ell}} = \sqrt{\frac{R_\ell + j\omega L_\ell}{G_\ell + j\omega C_\ell}}$$

$$\text{Velocità di propagazione } u = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\text{Lunghezza d'onda } \lambda = \frac{u}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$$

L'argomento delle funzioni esponenziali si esplicita $kx = \alpha x + j\beta x = \alpha x + j2\pi \frac{x}{\lambda}$

Da cui si vede che la costante di attenuazione è responsabile del decadimento esponenziale dell'ampiezza nel verso di propagazione dell'onda e la lunghezza d'onda è il periodo spaziale della rotazione di fase.

Dalle (3.29), (3.30) applicate alle (3.32) si trova $\bar{I}_{D1} = \frac{\bar{V}_{D1}}{\bar{Z}_C} \quad \bar{I}_{I1} = -\frac{\bar{V}_{I1}}{\bar{Z}_C}$

Il rapporto tra tensione e corrente singolarmente per l'onda diretta e inversa è costante e pari alla impedenza caratteristica. Di conseguenza le (3.32) richiedono solo due condizioni al contorno.

Casi particolari

Linea senza perdite (linea ideale)

Sono nulli i parametri dissipativi $R_\ell = 0 \quad G_\ell = 0$

Segue

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{L_\ell C_\ell}$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} \quad \text{reale}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{L_\ell C_\ell}} \quad \lambda = \frac{1}{f\sqrt{L_\ell C_\ell}}$$

Linea quasi ideale

Si assume $R_\ell \neq 0 \quad G_\ell = 0$

Per resistenza piccola ($R_\ell \ll \omega L_\ell$) si approssima a

$$\beta = \omega\sqrt{L_\ell C_\ell}$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} \quad \text{reale}$$

$$\alpha = \frac{R_\ell}{2Z_C} = \frac{R_\ell}{2} \sqrt{\frac{C_\ell}{L_\ell}}$$

Potenza transitante

La potenza attiva in un punto della linea è $P(x) = \text{Re}[\bar{V}(x)\bar{I}(x)]$

Per linea ideale o quasi ideale (impedenza caratteristica reale) risulta dalle (3.32)

$$P(x) = \frac{V_{D1}^2}{Z_C} e^{-2\alpha x} - \frac{V_{I1}^2}{Z_C} e^{2\alpha x}$$

La potenza totale è la somma di due termini: la potenza associata alla onda diretta

$P_D(x) = \frac{V_{D1}^2}{Z_C} e^{-2\alpha x}$ che si propaga in senso positivo e la potenza associata alla onda inversa

$P_I(x) = -\frac{V_{I1}^2}{Z_C} e^{2\alpha x}$ che si propaga in senso negativo. I due termini si attenuano nel senso della propagazione.

Linea di lunghezza infinita

Esiste solo l'onda diretta

$$\begin{aligned} \bar{V}(x) &= \bar{V}_{D1} e^{-kx} \\ \bar{I}(x) &= \frac{\bar{V}_{D1}}{Z_C} e^{-kx} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Alla prima estremità la tensione e corrente sono

$$\bar{V}(0) = \bar{V}_{D1} \quad \bar{I}(0) = \frac{\bar{V}_{D1}}{Z_C}$$

Alla prima estremità la linea infinita equivale a un bipolo di impedenza pari all'impedenza caratteristica.

Linea di lunghezza finita

Doppio bipolo

Se interessa solo il comportamento alle estremità la linea di lunghezza finita costituisce un doppio bipolo (Fig. 3.6).

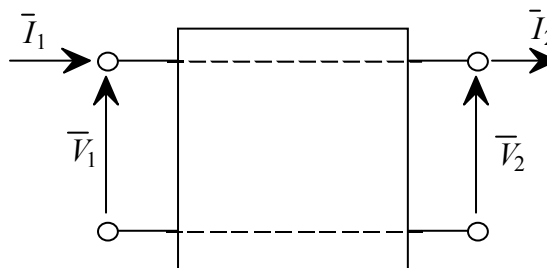


Fig. 3.6. Linea di trasmissione come doppio bipolo.

Sia ℓ la lunghezza. Dalle (3.32) i valori di estremità 1 ($x=0$) e 2 ($x=\ell$) sono

$$\begin{aligned}\bar{V}_1 &= \bar{V}_{D1} + \bar{V}_{I1} & \bar{V}_2 &= \bar{V}_{D1}e^{-k\ell} + \bar{V}_{I1}e^{k\ell} = \bar{V}_{D2} + \bar{V}_{I2} \\ \bar{I}_1 &= \frac{\bar{V}_{D1}}{\bar{Z}_C} - \frac{\bar{V}_{I1}}{\bar{Z}_C} & \bar{I}_2 &= \frac{\bar{V}_{D1}}{\bar{Z}_C}e^{-k\ell} - \frac{\bar{V}_{I1}}{\bar{Z}_C}e^{k\ell} = \frac{\bar{V}_{D2}}{\bar{Z}_C} - \frac{\bar{V}_{I2}}{\bar{Z}_C}\end{aligned}\quad (3.35)$$

Forma di trasmissione diretta

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(k\ell) & \bar{Z}_C \sinh(k\ell) \\ \frac{1}{\bar{Z}_C} \sinh(k\ell) & \cosh(k\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}\quad (3.36)$$

Forma di trasmissione inversa

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(k\ell) & -\bar{Z}_C \sinh(k\ell) \\ -\frac{1}{\bar{Z}_C} \sinh(k\ell) & \cosh(k\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix}\quad (3.37)$$

Seconda forma ibrida

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tanh(k\ell)}{\bar{Z}_C} & -\frac{1}{\cosh(k\ell)} \\ \frac{1}{\cosh(k\ell)} & \bar{Z}_C \tanh(k\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ -\bar{I}_2 \end{bmatrix}\quad (3.38)$$

Matrice impedenza

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \bar{Z}_C \begin{bmatrix} \frac{1}{\tanh(k\ell)} & \frac{1}{\sinh(k\ell)} \\ \frac{1}{\sinh(k\ell)} & \frac{1}{\tanh(k\ell)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ -\bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

La linea è un doppio bipolo reciproco.

Linea a vuoto e in corto

La forma di trasmissione diretta fornisce anche i valori nei casi di seconda estremità a vuoto ($I_2 = 0$)

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{Z}_C}{\tanh(k\ell)} \quad \bar{V}_2 = \frac{\bar{V}_1}{\cosh(k\ell)}$$

e in corto circuito ($V_2 = 0$)

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \bar{Z}_C \tanh(k\ell) \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{I}_1}{\cosh(k\ell)} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C \sinh(k\ell)}$$

Impedenza di estremità

Alla seconda estremità sia connessa l'impedenza di carico Z_L . Vale la relazione $\bar{V}_2 = \bar{Z}_L \bar{I}_2$.

Si evidenzia l'indice di riflessione q (costante complessa), rapporto tra le ampiezze dell'onda inversa e diretta al secondo estremo.

$$q = \frac{\bar{V}_{I2}}{\bar{V}_{D2}} = -\frac{\bar{I}_{I2}}{\bar{I}_{D2}} = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_C}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_C} \quad (3.39)$$

Per $\bar{Z}_L = \bar{Z}_C$ si ha $q=0$. E' il caso di impedenza del carico adattata alla linea. L'onda inversa è assente e valgono le (3.34). La linea si comporta come di lunghezza infinita.

Per $\bar{Z}_L = 0$ si ha $q=-1$. E' il caso di corto circuito all'estremità. L'onda inversa è uguale all'onda diretta e di fase tale da avere tensione nulla alla estremità.

Per $\bar{Z}_L = \infty$ si ha $q=1$. E' il caso di linea a vuoto all'estremità. L'onda inversa è uguale all'onda diretta e di fase tale da avere corrente nulla alla estremità.

L'impedenza alla prima estremità della linea con carico alla seconda estremità è

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \bar{Z}_C \frac{\bar{Z}_L \cosh(k\ell) + \bar{Z}_C \sinh(k\ell)}{\bar{Z}_C \cosh(k\ell) + \bar{Z}_L \sinh(k\ell)} \quad (3.40)$$

Valori lungo la linea

Direttamente la forma di trasmissione inversa fornisce i valori in funzione delle condizioni alla prima estremità

$$\begin{bmatrix} \bar{V}(x) \\ \bar{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(kx) & -\bar{Z}_C \sinh(kx) \\ -\frac{1}{\bar{Z}_C} \sinh(kx) & \cosh(kx) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

In funzione dell'indice di riflessione le (3.32) si riformulano evidenziando la propagazione di due onde in senso opposto. Si utilizza anche la coordinata inversa valutata dal secondo estremo $x' = \ell - x$.

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_{D1} e^{-kx} + \bar{V}_{I2} e^{-kx'} = \bar{V}_{D1} e^{-kx} + q \bar{V}_{D2} e^{-kx'} = \bar{V}_{D1} [e^{-kx} + q e^{-k(\ell+x)}] \quad (3.42)$$

$$\bar{I}(x) = \bar{I}_{D1} e^{-kx} + \bar{I}_{I2} e^{-kx'} = \bar{I}_{D1} e^{-kx} - q \bar{I}_{D2} e^{-kx'} = \bar{I}_{D1} [e^{-kx} - q e^{-k(\ell+x)}] = \frac{\bar{V}_{D1}}{\bar{Z}_C} [e^{-kx} - q e^{-k(\ell+x)}]$$

Evidenziando i valori alla prima estremità si ottiene

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_{D1} [1 + q e^{-2k\ell}] \quad \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{D1}}{\bar{Z}_C} [1 - q e^{-2k\ell}] = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C} \frac{1 - q e^{-2k\ell}}{1 + q e^{-2k\ell}}$$

quindi

$$\bar{V}(x) = \frac{\bar{V}_1}{1 + q e^{-2k\ell}} [e^{-kx} + q e^{-k(\ell+x)}] \quad (3.43)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{I}_1}{1 - q e^{-2k\ell}} [e^{-kx} - q e^{-k(\ell+x)}]$$

Linea a vuoto

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 [\cosh(kx) - \tanh(k\ell) \sinh(kx)] = \bar{V}_1 \frac{\cosh(kx')}{\cosh(k\ell)}$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}_1}{Z_C} [\tanh(k\ell) \cosh(kx) - \sinh(kx)] = \frac{\bar{V}_1}{Z_C} \frac{\sinh(kx')}{\cosh(k\ell)}$$

Linea in corto

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 \left[\cosh(kx) - \frac{\sinh(kx)}{\tanh(k\ell)} \right] = \bar{V}_1 \frac{\sinh(kx')}{\sinh(k\ell)}$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}_1}{Z_C} \left[\frac{\cosh(kx)}{\tanh(k\ell)} - \sinh(kx) \right] = \frac{\bar{V}_1}{Z_C} \frac{\cosh(kx')}{\sinh(k\ell)}$$

LINEA SENZA PERDITE

I parametri generali diventano

$$k = j\beta = j\omega\sqrt{L_\ell C_\ell}$$

$$\cosh(k\ell) = \cos(\beta\ell) \quad \sinh(k\ell) = j \sin(\beta\ell)$$

Parametri specifici

(si trascura la induttanza interna e la resistenza)

Linea bifilare

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad Z_C = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{D}{r}$$

Cavo coassiale

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad Z_C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{R}{r}$$

Linea trifase

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad Z_C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{D}{r}$$

Catenaria (assimilata a conduttore in presenza di terreno)

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad Z_C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{2h}{r}$$

La velocità di propagazione u e la lunghezza d'onda dipendono solo dai parametri specifici del mezzo. In linee aeree in aria u è praticamente uguale alla velocità di propagazione nel vuoto.

Nel vuoto:

$$\varepsilon_0 = 8,8544 \cdot 10^{-12} F/m \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m = 1,2566 \cdot 10^{-6} H/m$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,9979 \cdot 10^8 m/s$$

In aria la lunghezza d'onda dipende solo dalla frequenza. Per $f=50Hz$ $\lambda = 6000km$.

Le linee in cavo hanno velocità di propagazione e lunghezza d'onda sensibilmente inferiori per la maggiore costante dielettrica dell'isolante.

Valori agli estremi

Forma di trasmissione diretta

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta\ell) & j\bar{Z}_C \sin(\beta\ell) \\ \frac{j}{\bar{Z}_C} \sin(\beta\ell) & \cos(\beta\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Forma di trasmissione inversa

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta\ell) & -j\bar{Z}_C \sin(\beta\ell) \\ -\frac{j}{\bar{Z}_C} \sin(\beta\ell) & \cos(\beta\ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Valori lungo la linea

$$\begin{bmatrix} \bar{V}(x) \\ \bar{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta x) & -j\bar{Z}_C \sin(\beta x) \\ -\frac{j}{\bar{Z}_C} \sin(\beta x) & \cos(\beta x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Linea infinita o accordata

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 e^{-j\beta x}$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C} e^{-j\beta x}$$

Onda stazionaria sulla linea di lunghezza finita

Nella linea con seconda estremità a vuoto o in corto si ha $|q|=1$. Mancando inoltre l'attenuazione le onde diretta e inversa nelle (3.43) sono di pari ampiezza. La loro composizione risulta in una onda stazionaria, ovvero in ogni punto della linea tensione e corrente sono sinusoidali nel tempo, l'ampiezza nel punto considerato è costante nel tempo e sinusoidale lungo la coordinata spaziale. Si dicono nodi i punti di ampiezza nulla e ventri i punti di ampiezza massima. Nodi della tensione corrispondono a ventri della corrente e viceversa.

Sono significativi gli andamenti di tensione e corrente per linea con seconda estremità a vuoto ed in corto. Si considera assegnata la tensione alla prima estremità.

Linea a vuoto

La seconda estremità a vuoto è un nodo per la tensione.

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = -j \frac{\bar{Z}_C}{\tan(\beta\ell)} \quad \bar{V}_2 = \frac{\bar{V}_1}{\cos(\beta\ell)}$$

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 [\cos(\beta x) + \tan(\beta\ell) \sin(\beta x)] \quad \bar{V}(x') = \bar{V}_1 \frac{\cos(\beta x')}{\cos(\beta\ell)} = \bar{V}_2 \cos(\beta x')$$

$$\bar{I}(x) = j \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C} [\tan(\beta\ell) \cos(\beta x) - \sin(\beta x)] \quad \bar{I}(x') = j \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C} \frac{\sin(\beta x')}{\cos(\beta\ell)} = j \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_C} \sin(\beta x')$$

Linea in corto circuito

La seconda estremità in corto è un nodo per la corrente.

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = j \bar{Z}_C \tan(\beta\ell) \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{I}_1}{\cos(\beta\ell)} = -j \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C \sin(\beta\ell)}$$

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 \left[\cos(\beta x) - \frac{\sin(\beta x)}{\tan(\beta\ell)} \right] \quad \bar{V}(x') = \bar{V}_1 \frac{\sin(\beta x')}{\sin(\beta\ell)} = j \bar{Z}_C \bar{I}_2 \sin(\beta x')$$

$$\bar{I}(x) = -j \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C} \left[\frac{\cos(\beta x)}{\tan(\beta\ell)} + \sin(\beta x) \right] \quad \bar{I}(x') = -j \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_C} \frac{\cos(\beta x')}{\sin(\beta\ell)} = \bar{I}_2 \cos(\beta x')$$

Linea quarto lunghezza d'onda

Le formule evidenziano la possibilità di situazioni critiche per l'annullarsi delle funzioni sinusoidali ad un estremo. Sono condizioni di risonanza serie o parallelo che si manifestano per particolari lunghezze della linea in relazione alla frequenza. Per il comportamento effettivo bisogna considerare i termini dissipativi qui trascurati.

$$\text{Per } \ell = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} \quad (n=0,1,2,\dots) \text{ si ha } \cos(\beta\ell) = 0 \quad \sin(\beta\ell) = \pm 1$$

Linea a vuoto

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = 0 \quad \text{Impedenza nulla}$$

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \infty \quad \text{La tensione al secondo estremo è amplificata}$$

Linea in corto

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \infty \quad \text{Impedenza infinita} \quad \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \infty \quad \frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1} = \mp \frac{j}{\bar{Z}_C}$$