0.0.1 Autocorrelazione di segnali chirp

Si consideri il segnale chirp

$$x(t) = e^{j\pi\alpha t^2}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

avente fase istantanea

$$\varphi(t) = \pi\alpha t^2 \qquad\qquad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

e frequenza istantanea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \alpha t \qquad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

La sua funzione di autocorrelazione è

$$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi\alpha t^2}\Pi\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j\pi\alpha(t-\tau)^2}\Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right)\mathrm{d}t$$

che, valutata per $0 \leq \tau \leq T$, vale

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= e^{-j\pi\alpha\tau^2}\int_{\tau-T/2}^{T/2} e^{j2\pi\alpha t\tau}\mathrm{d}t \\ &= e^{-j\pi\alpha\tau^2}\frac{1}{j2\pi\alpha\tau}\left[e^{j\pi\alpha\tau T} - e^{j2\pi\alpha\tau(\tau-T/2)}\right] \\ &= \frac{1}{j2\pi\alpha\tau}\left[e^{j\pi\alpha(\tau T-\tau^2)} - e^{-j\pi\alpha(\tau T-\tau^2)}\right] \\ &= \frac{1}{\pi\alpha\tau}\sin\left(\pi\alpha\tau(T-\tau)\right) \end{aligned}$$

Analogamente si può valutare l'espressione per $-T \leq \tau \leq 0$:

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= e^{-j\pi\alpha\tau^2}\int_{-T/2}^{\tau+T/2} e^{j2\pi\alpha t\tau}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\pi\alpha\tau}\sin\left(\pi\alpha\tau(T+\tau)\right) \end{aligned}$$

e quindi la funzione di autocorrelazione del segnale chirp è

$$r_x(\tau) = (T-|\tau|)\mathrm{sinc}(\alpha\tau(T-|\tau|))\,.$$

Per ottenere una valutazione approssimata della durata di $r_x(\tau)$ consideriamo la posizione del primo zero, che si ha quando l'argomento della funzione sinc è uguale a 1, e cioè risolvendo l'equazione di secondo grado

$$\alpha\tau^2 - \alpha\tau T + 1 = 0$$

Il primo zero si trova in corrispondenza della minore delle due soluzioni

$$\frac{T}{2} \pm \frac{T}{2}\sqrt{1-\frac{4}{\alpha T^2}}$$

che può essere approssimata nell'ipotesi $\alpha T^2 \gg 1$, per cui, sviluppando in serie di MacLaurin la radice quadrata e fermandosi al primo ordine, si ottiene

$$\tau \simeq \frac{T}{2} - \frac{T}{2}\left(1-\frac{2}{\alpha T^2}\right) = \frac{1}{\alpha T}\,.$$

In figura sono rappresentati i grafici del segnale chirp e della sua autocorrelazione per $a = 5$ e $T = 3$.

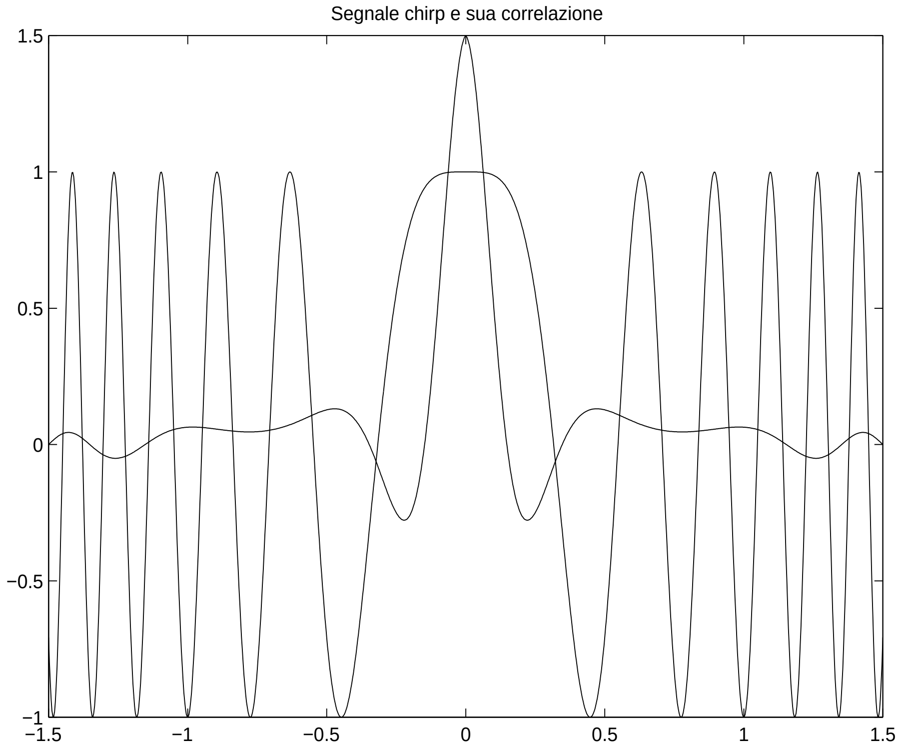

Figura 1: