6. Convoluzione (21 Dicembre 2007)

Supponiamo che $u, w \in L^2(\mathbb{R})$ siano segnali ad energia finita: è possibile esprimere mediante u e w l'antitrasformata del prodotto $\hat{u}\hat{w}$?

Tipicamente questo problema si presenta nello studio dei *filtri lineari.* Questi sono trasformazioni (che possiamo indicare con la lettera $\mathscr{T}$) che operano su un segnale di ingresso u (*input*) e restituiscono un segnale di uscita $v = \mathscr{T}[u]$ (*output*) legato a u dalla formula

$$u \xrightarrow{\mathscr{T}} v = \mathscr{T}[u]: \qquad \hat{v}(f) = \hat{u}(f) \cdot \hat{w}(f). \tag{6.1}$$

È facile quindi descrivere l'azione del filtro $\mathscr{T}$ in frequenza: la trasformata di Fourier dell'input viene moltiplicata per una data funzione $\hat{w}(f)$; questa viene chiamata anche *funzione di trasferimento del filtro.*

Come si può però descrivere l'effetto di $\mathscr{T}$ in tempo? Ovviamente l'ouput v si può ottenere antitrasformando la (6.1):

$$v(t) = \bar{\mathscr{F}}[\hat{u} \cdot \hat{w}] = \mathscr{F}^{-1}[\hat{u} \cdot \hat{w}], \tag{6.2}$$

ma questa formula ha lo svantaggio di coinvolgere l'antitrasformata di Fourier $\mathscr{F}^{-1}$ e quindi non è facilmente trattabile.

È possibile invece fornire una formula che produce l'output v in tempo, senza passare per la trasformata di Fourier. Tale formula è legata ad una nuova operazione, che ora introduciamo

Definizione 6.1 *Si chiama* prodotto di convoluzione *di due segnali u, w definiti in $\mathbb{R}$ il nuovo segnale (quando esiste...) $v = u * w$ definito da*

$$v(t) := \int_{\mathbb{R}} u(s)w(t-s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} w(s)u(t-s)\,ds. \tag{6.3}$$

Teorema 6.2 *Siano u, w segnali ad energia finita. Allora*

$$u * w = \mathscr{F}^{-1}[\hat{u} \cdot \hat{w}] \tag{6.4}$$

Dimostrazione Si tratta di un calcolo diretto a partire dalla (6.2):

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(f)\hat{w}(f)e^{2\pi ift}\,df = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} u(s)e^{-2\pi ifs}\,ds \Big) \hat{w}(f)e^{2\pi ift}\,df \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(s)e^{-2\pi ifs}\,\hat{w}(f)e^{2\pi ift}\,ds\,df = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(s)\,\hat{w}(f)e^{2\pi if(t-s)}\,ds\,df \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(s) \Big(\int_{\mathbb{R}} \hat{w}(f)e^{2\pi if(t-s)}\,df \Big)\,ds = \int_{\mathbb{R}} u(s)w(t-s)\,ds. \end{aligned}$$

Raffinando il calcolo precedente si può mostrare che

Teorema 6.3 *Se $u, w \in L^2(\mathbb{R})$ allora*

$$u * w = \mathscr{F}^{-1}[\hat{u}\hat{w}] \quad \text{è una funzione ben definita, continua e infinitesima all'infinito.}$$

Se poi uno dei due segnali (ad esempio w) appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ allora v appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ e si ha

$$\boxed{\mathscr{F}[u * w] = \hat{u} \cdot \hat{w}.} \tag{6.5}$$

Più in generale

$$\begin{cases} u \in L^1(\mathbb{R}) & \Rightarrow v = u * w \in L^1(\mathbb{R}) \\ u \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) & \Rightarrow v = u * w \in \mathbb{B}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Discussione

Il calcolo effettivo della convoluzione. Ci sono ovviamente almeno due possibilità per calcolare un prodotto di convoluzione: *utilizzare la trasformata di Fourier e la* (6.2) oppure *direttamente la formula 6.3.* In quest'ultimo caso è utile cercare di visualizzare "graficamente" i passi che servono per calcolare v in un certo istante t.

1. Innanzitutto occorre costruire il nuovo segnale "ribaltato"
$$w(s) \longrightarrow \tilde{w}(s) := w(-s) \tag{6.6}$$
ottenuto invertendo l'ordine dei tempi (quindi per simmetria rispetto all'asse delle ordinate). Conviene anche lavorare con un nome diverso per la variabile indipendente (s invece che t, perchè t è il tempo in cui viene calcolato il segnale finale v).
2. Si opera poi uno shift di ampiezza t del segnale $\tilde{w}$:
$$\tilde{w}(s) \longrightarrow \mathsf{S}_t[\tilde{w}] = \tilde{w}(s-t) \tag{6.7}$$
3. Si sovrappone il segnale $\tilde{w}(s-t)$ così ottenuto sul segnale $u(s)$ (la variabile indipendente è sempre s) e si cerca di calcolarne il prodotto $u(s)\tilde{w}(s-t)$.
4. Si calcola infine l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ di tale prodotto.

Esempi 6.4

$$\operatorname{rect}(t) * \operatorname{rect}(t) = \triangle(t), \quad H(t) * H(t) = H(t)t, \quad \operatorname{sinc}(t) * \operatorname{sinc}(t) = \operatorname{sinc}(t),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho^2}} e^{-\frac{t^2}{2\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\rho^2)}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma^2+\rho^2)}}$$

Notazione

La scrittura della convoluzione (pedante...). Quando si lavora con la convoluzione è facile confondersi con i nomi delle variabili in gioco e, talvolta, anche le notazioni possono confondere. Ci sono le variabili indipendenti in cui sono espressi i segnali da convolvere, la variabile in cui è calcolato il segnale convoluto e la variabile muta di integrazione che si usa nella formula (6.3). Quando i segnali hanno un nome specifico non si sbaglia: ad esempio, scrivendo

$$\operatorname{rect} * \operatorname{rect} = \triangle,$$

si intende che la convoluzione di due *rect* produce il nuovo segnale $\triangle$. Una variante, altrettanto corretta, è

$$\operatorname{rect} * \operatorname{rect}(t) = \triangle(t)$$

dove si intende che il valore in t del segnale $\operatorname{rect} * \operatorname{rect}$ è dato da $\triangle(t)$. Analogamente non si sbaglia introducendo un nome specifico per un segnale: ad esempio se considero il segnale $u(t) = \operatorname{rect}(2t)$ potrò scrivere

$$u * u(t) = \frac{1}{2}\triangle(2t)$$

dove si intende che la convoluzione di u con u calcolata in t (che andrebbe scritta $(u*u)(t)$) vale esattamente $\frac{1}{2}\triangle(2t)$. Spesso però non si perde tempo a introdurre un nome per un segnale e si scrive semplicemente il segnale $\operatorname{rect}(2t)$ e di conseguenza la formula

$$\operatorname{rect}(2t) * \operatorname{rect}(2t) = \frac{1}{2}\triangle(2t).$$

La variabile t ripetuta due volte a primo membro si intende come il nome della variabile indipendente in cui vengono espressi i due segnali da convolvere e che coincide con il nome della variabile indipendente in cui viene espresso il risultato.

Esercizio

Sia u un segnale (localmente) limitato e sia U una sua primitiva. Mostrare che

$$u * \operatorname{rect}(t) = U(t + 1/2) - U(t - 1/2).$$

La convoluzione gode di un certo numero di proprietà che sono importanti sia dal punto di vista teorico che nel calcolo effettivo.

Proprietà elementari

Proprietà commutativa

$$u * w = w * u$$

Linearità

$$(u_1 + u_2) * w = (u_1 * w) + (u_2 * w), \qquad (\lambda u) * w = \lambda(u * w)$$

In termini di filtri, questa proprietà dice che la convoluzione modellizza solo filtri *lineari*, cioè tali che

$$u_1 \xrightarrow{\mathscr{T}} v_1,\ u_2 \xrightarrow{\mathscr{T}} v_2 \quad \text{allora} \quad u_1 + u_2 \xrightarrow{\mathscr{T}} v_1 + v_2$$

Integrale Se $u, w \in L^1(\mathbb{R})$ sono assolutamente integrabili allora

$$\int_{\mathbb{R}} (u * w)\, dt = \int_{\mathbb{R}} u(t)\, dt \cdot \int_{\mathbb{R}} w(t)\, dt.$$

Input armonici Se w è integrabile e l'input $u(t) = e^{2\pi i f t}$ è un'onda armonica di frequenza f allora

$$e^{2\pi i f t} * w = \hat{w}(f) e^{2\pi i f t}, \quad e^{2\pi i f t} \xrightarrow{\mathscr{T}} \hat{w}(f) e^{2\pi i f t}.$$

In altre parole, l'output di un ingresso a frequenza f ha ancora la medesima frequenza: il segnale viene però modificato per un fattore (*complesso!*) $\hat{w}(f)$ (funzione di trasferimento) che ne cambia ampiezza e fase. In particolare, se l'ingresso è una costante c, l'uscita è ancora costante

$$1 * w = \int_{\mathbb{R}} w(t)\, dt, \quad c * w = c \int_{\mathbb{R}} w(t)\, dt.$$

Cambiamenti di scala

$$\text{se} \quad v = u * w \quad \text{allora} \quad u(\lambda t) * w(\lambda t) = \frac{1}{|\lambda|} v(\lambda t)$$

Simmetrie Se u, w hanno parità concorde (entrambi pari o entrambi dispari) allora $v = u * w$ è pari. Se u, w hanno parità discorder (uno è pari, l'altro dispari) allora $v = u * w$ è dispari.

Ritardi Ricordando che $\mathsf{S}_\tau[u](t) := u(t - \tau)$ si ha

$$\mathsf{S}_\tau[u] * w = \mathsf{S}_\tau[u * w], \quad \mathsf{S}_\tau[u] * \mathsf{S}_h[w] = \mathsf{S}_{\tau+h}[u * w].$$

In termini di filtri

$$\text{se} \quad u \xrightarrow{\mathscr{T}} v, \quad \text{allora} \quad \mathsf{S}_\tau[u] \xrightarrow{\mathscr{T}} \mathsf{S}_\tau[v]$$

Derivate Se u è regolare a tratti e continuo, allora

$$\frac{d}{dt}(u * w) = \left(\frac{d}{dt} u\right) * w.$$

In termini di filtri,

$$\text{se} \quad u \xrightarrow{\mathscr{T}} v, \quad \text{allora} \quad \frac{d}{dt} u \xrightarrow{\mathscr{T}} \frac{d}{dt} v$$

Supporti Ricordiamo che $\operatorname{supp} u \subset [a, b]$ significa che $u(t) \equiv 0$ al di fuori dell'intervallo $[a, b]$. Se $\operatorname{supp} u \subset [a, b]$ e $\operatorname{supp} w \subset [c, d]$ allora $\operatorname{supp}(u * w) \subset [a + c, b + d]$.

Segnali causali Se u, w sono *causali* (cioè $\operatorname{supp} u \subset [0, +\infty)$) allora $u * w$ è pure causale (si parla allora di filtri causali). Per i segnali causali la formula della convoluzione diventa

$$u * w(t) = H(t) \int_0^t u(s) w(t - s)\, ds$$

e per poterla definire basta che i segnali u, w siano limitati in ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

Primitiva Se u è causale o assolutamente integrabile su tutto $\mathbb{R}$ allora

$$H * u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(s)\, ds$$

è una primitiva di u (*l'unica casuale* se u è causale).