

0.1 LEGAMI INGRESSO USCITA PER LE FUNZIONI DI CORRELAZIONE

Il problema che ora affrontiamo è quello di determinare i legami tra alcune grandezze globali, quali la componente continua e la funzione di autocorrelazione, dell'ingresso e dell'uscita di un sistema LTI.

Iniziamo col valutare la componente continua dell'uscita $y_{dc} = \langle y(\cdot) \rangle$. Riferendoci, per fissare le idee, ai segnali a tempo discreto, si ha:

$$\begin{aligned} y_{dc} &= \langle y(n) \rangle = \langle h(n) * x(n) \rangle = \langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \rangle \\ &= \langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \langle x(n-m) \rangle \rangle = x_{dc} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)}_{H(0)} \end{aligned}$$

ove si è introdotto il *guadagno in continua* $H(0)$ del sistema pari all'area sottesa dalla risposta impulsiva, cioè:

$$H(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)$$

Pertanto, la componente continua in uscita al sistema è proporzionale a quella in ingresso, con costante di proporzionalità pari al guadagno in continua.

Passiamo ora alle funzioni di autocorrelazione. Precisamente consideriamo la situazione di Fig. 1, da cui, particolarizzando segnali e sistemi, è possibile ricavare i vari casi di interesse. I segnali in gioco possono essere di energia o di potenza, a tempo discreto o continuo: a seconda dei casi le funzioni di correlazione ammettono espressioni diverse, ma in ogni caso possono essere riguardate come prodotti scalari.

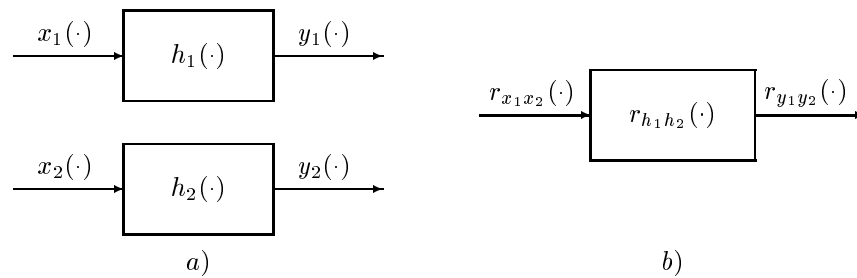


Figura 1: Schema per il calcolo del legame tra le mutue correlazioni degli ingressi e delle uscite.

Precisamente, con riferimento alla Fig. 1, ci proponiamo di determinare la mutua correlazione $r_{y_1 y_2}(\cdot)$ tra le due uscite in funzione di quella $r_{x_1 x_2}(\cdot)$ tra i due ingressi e delle risposte impulsive $h_1(\cdot)$ e $h_2(\cdot)$ dei due sistemi LTI.

Riferendoci a segnali e sistemi a tempo discreto, si ha:

$$r_{y_1 y_2}(m) = \langle y_1(n), y_2(n-m) \rangle = \langle \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_1(i)x_1(n-i), \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_2(j)x_2(n-m-j) \rangle$$

Nella relazione precedente $h_1(i)$ e $h_2(j)$ sono degli scalari: conseguentemente, per la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma, si ha:

$$r_{y_1 y_2}(m) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_1(i)h_2^*(j) \langle x_1(n-i), x_2(n-m-j) \rangle$$

il prodotto scalare a secondo membro dell'equazione precedente è la mutua correlazione $r_{x_1 x_2}(m+j-i)$, conseguentemente si ha

$$r_{y_1 y_2}(m) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_1(i)h_2^*(j)r_{x_1 x_2}(m+j-i)$$

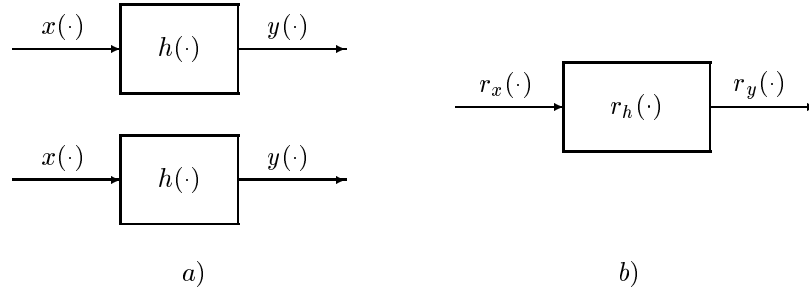


Figura 2: Legame ingresso uscita per l'autocorrelazione.

Tale legame può essere anche espresso in forma più compatta in termini di convoluzione. Si ha infatti, ponendo $n = m + j - i$

$$r_{y_1 y_2}(m) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_1(i) h_2^*(n - m + i) r_{x_1 x_2}(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{x_1 x_2}(n) r_{h_1 h_2}(m - n) = r_{x_1 x_2}(n) * r_{h_1 h_2}(m - n)$$

essendo $r_{h_1 h_2}(m)$ la mutua correlazione delle risposte impulsive.

Una analoga derivazione vale per segnali e sistemi continui, l'unica differenza concerne la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma che si trasforma, con argomento limite, nella proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto all'integrale. In definitiva risulta

$$r_{y_1 y_2}(\cdot) = r_{x_1 x_2}(\cdot) * r_{h_1 h_2}(\cdot) \quad (1)$$

In altri termini la mutua correlazione $r_{y_1 y_2}(\cdot)$ tra le due uscite dei sistemi LTI di Fig. 1a si ottiene come l'uscita del sistema LTI di risposta impulsiva $r_{h_1 h_2}(\cdot)$ alla mutua correlazione $r_{x_1 x_2}(\cdot)$ tra i due ingressi (Fig. 1b).

Si osservi che dall'equazione (1) segue che se i due ingressi sono incoerenti tali sono anche le due uscite; in altri termini una elaborazione LTI conserva l'incoerenza. Si noti infine che le due uscite possono essere incoerenti anche se i due ingressi non lo sono: all'uopo è sufficiente che siano incoerenti le due risposte impulsive.

Particolarizzando lo schema generale di Fig. 1a come in Fig. 2a è immediato derivare il legame ingresso-uscita per la funzione di autocorrelazione. In questo caso, dall'equazione (1) si ottiene:

$$r_y(\cdot) = r_x(\cdot) * r_h(\cdot) \quad (2)$$

cioè l'autocorrelazione dell'uscita è pari alla convoluzione dell'autocorrelazione dell'ingresso e di quella della risposta impulsiva: in altri termini, l'autocorrelazione della risposta di un sistema LTI è pari alla risposta all'ingresso $r_x(\cdot)$ del sistema avente risposta impulsiva $r_h(\cdot)$ (Fig. 2b).

Dalla relazione (2) segue che, se l'ingresso ha un'autocorrelazione impulsiva, si ha:

$$r_y(\cdot) = a\delta(\cdot) * r_h(\cdot) = ar_h(\cdot) \quad (3)$$

cioè l'uscita ha un'autocorrelazione proporzionale a quella della risposta impulsiva del sistema. Pertanto è possibile generare un segnale con una preassegnata autocorrelazione filtrando, con un filtro LTI, un segnale con autocorrelazione impulsiva, in particolare filtrando un segnale bianco. Per segnale bianco si intende un segnale aleatorio SSL a media nulla con autocorrelazione impulsiva: una sequenza di variabili aleatorie a media nulla, identicamente distribuite ed indipendenti, o almeno incorrelate, fornisce un primo esempio di segnale bianco.

Nel caso di segnali a tempo continuo, un generatore di segnali bianchi non è fisicamente realizzabile in quanto la sua potenza è infinita: tuttavia, anche in tal caso è utile introdurre tale modello quale caso limite di segnali di potenza SSL con autocorrelazione la cui durata è molto piccola. Si osservi esplicitamente che il filtro LTI necessario per ottenere la correlazione assegnata risulta individuato solo tramite la funzione di autocorrelazione della sua risposta impulsiva: il problema di risalire alla risposta impulsiva a partire dalla conoscenza della sua funzione di autocorrelazione, cioè al fattore $h(\cdot)$ a partire dal prodotto di convoluzione $h(\cdot) * h^*(-(\cdot))$ (fattorizzazione dell'autocorrelazione), non è di semplice soluzione nel dominio del tempo e, inoltre, non ammette una soluzione univoca; la non unicità della soluzione può, peraltro, essere utilizzata per imporre che il filtro cercato sia causale.

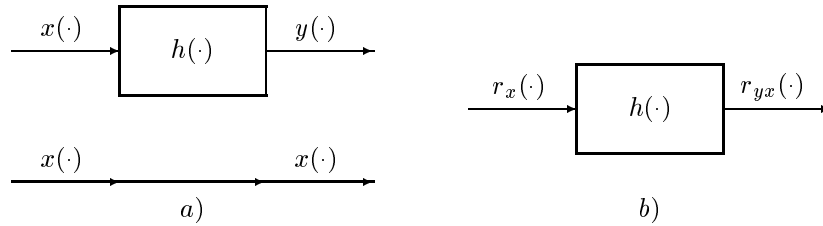


Figura 3: Schema di calcolo della mutua correlazione tra uscita ed ingresso.

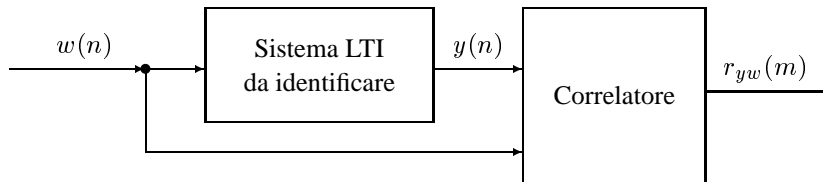


Figura 4: Procedura di identificazione di un sistema LTI.

L'equazione (1) consente anche di ricavare come casi particolari le mutue correlazioni uscita-ingresso e ingresso-uscita. Invero, sulla scorta della Fig. 3a, si ha:

$$r_{yx}(\cdot) = r_x(\cdot) * h(\cdot) * \delta(-(\cdot)) = r_x(\cdot) * h(\cdot) \quad (4)$$

che esprime il legame tra la mutua correlazione fra l'uscita e l'ingresso di un sistema LTI: dunque la mutua correlazione uscita-ingresso può calcolarsi come risposta del sistema LTI all'autocorrelazione dell'ingresso (Fig. 3a). In modo analogo si ottiene

$$r_{xy}(\cdot) = r_x(\cdot) * h^*(-(\cdot))$$

Analizziamo ora qualche applicazione di tale procedura.

Esempio 1: Identificazione di un sistema La relazione (4) è spesso usata allo scopo di identificare un sistema LTI incognito, intendendo in questo caso per identificazione del sistema la determinazione della sua risposta impulsiva. La procedura di identificazione è delineata in Fig. 4 per il caso di un sistema a tempo discreto, ma con le ovvie modifiche, essa è applicabile anche al caso di sistemi continui. Il sistema da identificare viene sollecitato con un segnale bianco $w(n)$, in pratica con un segnale avente un'autocorrelazione la cui durata è notevolmente inferiore a quella presunta del sistema da identificare; il correlatore calcola poi la mutua correlazione tra l'uscita e l'ingresso del sistema LTI, che, per la (4), è proporzionale alla risposta impulsiva incognita del sistema stesso, cioè:

$$r_{yw}(m) = \sigma^2 \delta(m) * h(m) = \sigma^2 h(m)$$

ove la costante di proporzionalità è data dalla potenza σ^2 del segnale bianco utilizzato in ingresso.

Esempio 2: Misura dei tempi di propagazione

Si consideri la propagazione attraverso un mezzo non distorcente: in tal caso il segnale trasmesso $x(t)$ risulta, per effetto della propagazione, ritardato ed attenuato, nonché affetto dall'aggiunta di un rumore additivo indipendente, come delineato in Fig. 5: pertanto il segnale ricevuto $v(t)$ è dato da:

$$v(t) = \alpha x(t - t_0) + n(t)$$

dove t_0 è il ritardo, supposto incognito, e α è l'attenuazione dovuta alla propagazione. In altri termini il mezzo non dispersivo si comporta come un sistema LTI di risposta impulsiva $h(t) = \alpha \delta(t - t_0)$; conseguentemente la misura del ritardo incognito t_0 è equivalente alla misura della risposta impulsiva a partire da dati rumorosi e pertanto può essere condotta sollecitando il mezzo con rumore bianco secondo quanto precedentemente esposto. Precisamente, nel caso in esame, la mutua correlazione tra il segnale ricevuto e quello trasmesso vale

$$r_{vx}(\tau) = r_{yx}(\tau) + r_{nx}(\tau) = r_x(\tau) * \alpha \delta(\tau - t_0) + r_{nx}(\tau)$$

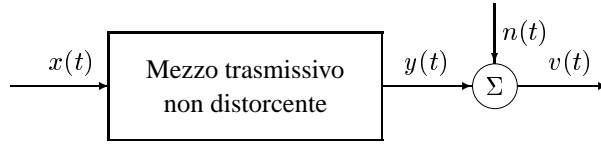


Figura 5: Modello di propagazione non distortore.

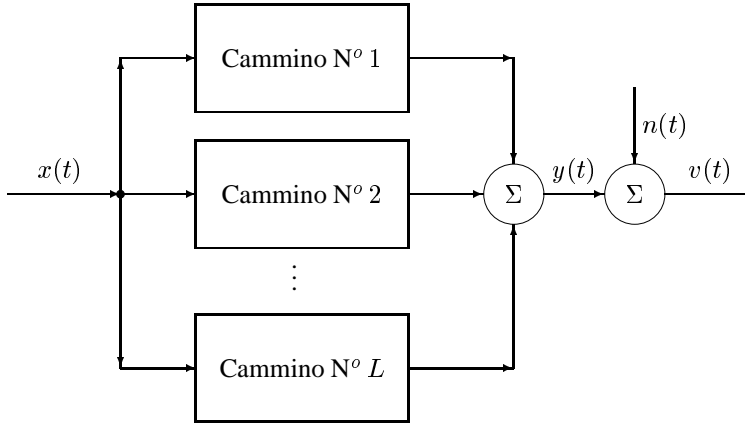


Figura 6: Modello di propagazione non dispersiva su cammini multipli.

Pertanto, ricordando che l'autocorrelazione ha un massimo nell'origine, t_0 può essere determinato individuando il punto di massimo della funzione di mutua correlazione uscita / ingresso; come già osservato la misura è tanto più precisa quanto più il termine $r_{nx}(t)$ dovuto al rumore è trascurabile e quindi quanto più elevato è l'intervallo di osservazione e quanto più elevata è la norma del segnale trasmesso $x(t)$. Si osservi inoltre che, a parità di norma, l'individuazione del ritardo di propagazione t_0 è tanto più accurata quanto più l'autocorrelazione del segnale trasmesso è impulsiva.

Poiché $t_0 = d/c$, essendo d la distanza percorsa nel mezzo e c la velocità di propagazione, il metodo descritto si presta a risolvere problemi di valutazione della distanza (noto c) oppure di identificazione della velocità di propagazione nel mezzo (noto d).

Esempio 2: Risoluzione di cammini multipli di propagazione

Se la propagazione non distortore avviene su cammini multipli come delineato in Fig. 6, supposto trasmesso $x(t)$, il segnale ricevuto vale

$$v(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x(t - t_i) + n(t) \quad (5)$$

ove α_i e t_i sono l'attenuazione e il ritardo relativi al cammino i -esimo: si pone il problema di risolvere i singoli cammini, di identificarne cioè il numero e di misurarne i vari ritardi.

Analogamente a quanto visto nell'esempio precedente, il problema può essere considerato come un problema di identificazione: sollecitando il mezzo col segnale $x(t)$, la funzione di mutua correlazione fra segnale trasmesso e quello ricevuto $v(t)$ vale

$$r_{vx}(\tau) = \sum_{i=1}^L \alpha_i r_x(\tau - t_i) + r_{nx}(\tau) \quad (6)$$

e pertanto esibisce dei picchi multipli, ognuno in corrispondenza di un ritardo di propagazione, come mostrato in Fig. 7, ove si è supposta triangolare l'autocorrelazione del segnale trasmesso e, per semplicità, si è ignorato il contributo del rumore in uscita al correlatore.

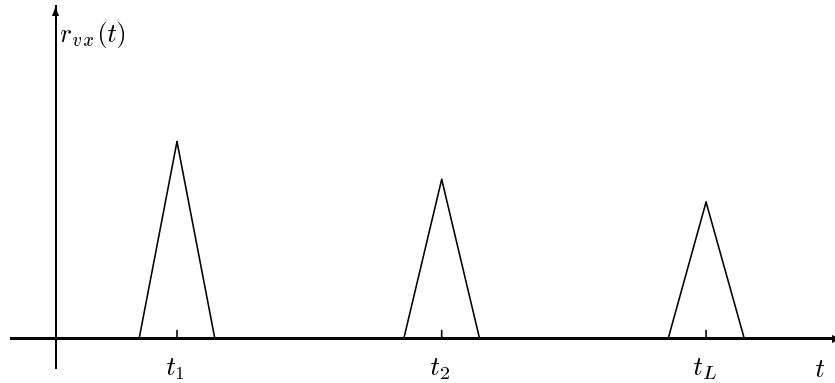


Figura 7: Mutua correlazione uscita ingresso in presenza di propagazione multipla.

Si osservi che per risolvere i vari cammini, è necessario che i vari impulsi presenti nella mutua correlazione non si sovrappongano e, quindi, che il segnale trasmesso abbia un'autocorrelazione di breve durata; la forma dell'autocorrelazione è inessenziale purché la durata sia piccola rispetto alla minima differenza di ritardo tra i vari cammini in modo da garantire che i picchi non si sovrappongano.

Esempio 3: Risoluzione di echi radar

Un problema del tutto analogo a quello della risoluzione dei cammini multipli di propagazione è quello della risoluzione degli echi radar.

Un sistema radar sonda lo spazio circostante allo scopo di individuare eventuali bersagli inviando con una prefissata cadenza degli impulsi. In presenza di più bersagli il segnale ricevuto $v(t)$ è, almeno in prima approssimazione, la somma degli echi dovuti ai vari bersagli più rumore: pertanto $v(t)$ è dato anche in questo caso dalla (5). Precisamente le costanti α_i portano in conto, oltre l'attenuazione dell'impulso trasmesso $p(t)$ dovuta alla propagazione, anche la diversa capacità che hanno i vari bersagli di riflettere il segnale trasmesso, mentre i ritardi t_i sono proporzionali alla distanza D_i dei diversi bersagli dal radar; precisamente, detta c la velocità di propagazione, si ha:

$$t_i = 2 \frac{D_i}{c}$$

ove il fattore 2 tiene conto che la distanza D_i è percorsa dall'impulso due volte: dal radar al bersaglio e viceversa.

La mutua correlazione tra il segnale ricevuto e quello trasmesso è, anche in questo, data dalla (6): da tale relazione è evidente che è possibile distinguere i vari echi se gli addendi della sommatoria a secondo membro dell'equazione precedente non si sovrappongono e se l'ampiezza di tali echi, proporzionale all'energia dell'impulso trasmesso, è sufficientemente più grande del contributo di rumore: dunque un radar ha un potere risolutore che dipende dalla durata dell'autocorrelazione degli impulsi trasmessi.

Tale esigenza può essere banalmente soddisfatta utilizzando degli impulsi di breve durata, ma ciò contrasta con l'esigenza di avere impulsi di elevata energia in presenza di un vincolo per la potenza di picco. A ciò si può ovviare utilizzando treni d'impulsi non troppo corti, ma con autocorrelazione di breve durata (tecnica di compressione degli impulsi). Un esempio di tal fatta sono i cosiddetti impulsi codificati di Barker, cioè gli impulsi del tipo

$$p(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a(n)p_0(t - i\tau_0)$$

ove $p_0(t)$ è di norma un impulso rettangolare di durata τ_0 e la sequenza $a(n)$, chiamata codice, è una sequenza di 1 e di -1 di lunghezza N , scelta in modo da garantire la desiderata autocorrelazione. L'autocorrelazione di tale impulso vale, in ogni caso, $N\mathcal{E}_0$ nell'origine, ed è nulla per valori del ritardo che in modulo eccedono $N\tau_0$; scegliendo opportunamente la sequenza $a(n)$ è possibile ottenere un'autocorrelazione che per $|\tau| > \tau_0$ valga al più $1/N$ del massimo.

Nella Tab. 1 sono riportate i valori di $a(n)$ che garantiscono tali proprietà; sfortunatamente non esistono codici di Barker di lunghezza maggiore di $N = 13$. Si osservi che complementando e/o ribaltando un codice di Barker si ottiene ancora un codice di Barker.

$N = 2$	+1 +1 oppure -1 +1
$N = 3$	+1 +1 -1
$N = 4$	+1 +1 -1 +1 oppure +1 +1 +1 -1
$N = 5$	+1 +1 +1 -1 +1
$N = 7$	+1 +1 +1 -1 -1 +1 -1
$N = 11$	+1 +1 +1 -1 -1 -1 +1 -1 -1 +1 -1
$N = 13$	+1 +1 +1 +1 +1 -1 -1 +1 +1 -1 +1 -1 +1

Tabella 1: Sequenze di Barker.