Elettronica II – Proprietà e applicazioni della trasformata di Fourier; impedenza complessa; risposta in frequenza

Valentino Liberali

Dipartimento di Tecnologie dell'Informazione
Università di Milano, 26013 Crema

e-mail: `liberali@dti.unimi.it`

`http://www.dti.unimi.it/~liberali`

Trasformata di Fourier

Trasformata di Fourier o *Fourier transform* (FT) $X(f)$:

$$X(f) = \mathscr{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; e^{-j2\pi ft}\; dt$$

Antitrasformata di Fourier $x(t)$:

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}(X(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\; e^{j2\pi ft}\; df$$

$$x(t) \underset{\mathscr{F}^{-1}}{\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}} X(f)$$

Trasformata di Fourier: proprietà (1/4)

Linearità:

$$x_1(t) + x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) + X_2(f)$$

$$kx(t) \longleftrightarrow kX(f)$$

Cambio di scala:

$$x(kt) \longleftrightarrow \frac{1}{k}\, X\left(\frac{f}{k}\right)$$

Traslazione nel tempo:

$$x(t+t_0) \longleftrightarrow e^{j2\pi f t_0} X(f)$$

Traslazione in frequenza (o modulazione):

$$e^{-j2\pi f_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(f+f_0)$$

Trasformata di Fourier: proprietà (2/4)

Moltiplicazione e convoluzione:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) * X_2(f)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

L'operazione di **convoluzione** tra due segnali (indicata con $*$) è definita come:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau)\, d\tau$$

Trasformata di Fourier: proprietà (3/4)

Derivazione:

$$x'(t) \longleftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Integrazione:

$$\int x(t)\, dt \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

Queste due relazioni permettono di trasformare un'**equazione differenziale o integrale** nel dominio del tempo in un'**equazione algebrica** nel dominio della frequenza.

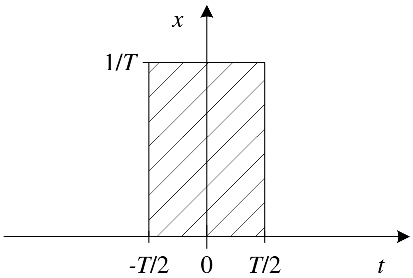
Trasformata di Fourier: proprietà (4/4)

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, (\cos 2\pi f t - j \sin 2\pi f t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \cos 2\pi f t\, dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \sin 2\pi f t\, dt \end{aligned}$$

$x(t)$ reale e pari $\longleftrightarrow$ $X(f)$ reale e pari

$x(t)$ reale e dispari $\longleftrightarrow$ $X(f)$ immaginaria e dispari

Esempio: calcolo della FT (1/4)



$$x(t) = A \ \mathrm{rect}\frac{t}{T} = \begin{cases} A & \text{se } -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione è un rettangolo, la cui area è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ dt = AT$$

Esempio: calcolo della FT (2/4)

La trasformata di Fourier della funzione rettangolo è:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\ e^{-j2\pi f t}\ dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\ (\cos 2\pi f t - j \sin 2\pi f t)\ dt \\ &= A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2\pi f t\ dt \\ &= AT\ \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \\ &= AT\ \mathrm{sinc} f T \end{aligned}$$

dove la funzione sinc è definita come: $\mathrm{sinc}\varphi = \frac{\sin \pi\varphi}{\pi\varphi}$

Esempio: calcolo della FT (3/4)

La trasformata della funzione sinc:

$$x(t) = A\ \mathrm{sinc}\frac{t}{T}$$

è la funzione rettangolo:

$$X(f) = AT\ \mathrm{rect} fT$$

Esempio: calcolo della FT (4/4)

La trasformata di Fourier della funzione delta di Dirac $\delta(t)$ si ottiene dalla trasformata del rettangolo ponendo $T \to 0$ e $AT = 1$:

$$\mathscr{F}(\delta(t)) = \mathrm{sinc}\ 0 = \lim_{T\to 0} \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} = 1$$

Viceversa, la trasformata di Fourier della costante 1 è la delta di Dirac:

$$\mathscr{F}(1) = \delta(f)$$

Trasformata di Fourier del coseno

La trasformata di un segnale cosinusoidale a frequenza f_0 è:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\cos 2\pi f_0 t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi f_0 t \; e^{-j2\pi f t}\; dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\; e^{-j2\pi f t}\; dt = \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f-f_0) t}\; dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f+f_0) t}\; dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)\end{aligned}$$

Trasformata di Fourier del seno

La trasformata di un segnale sinusoidale è:

$$\mathscr{F}(\sin 2\pi f_0 t) = \frac{-j}{2}\left(\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right)$$

(si calcola in maniera analoga a quella del coseno)

Relazione tra serie e trasformata

La trasformata di Fourier di un segnale periodico è una sommatoria di funzioni delta di Dirac, le cui ampiezze corrispondono ai coefficienti complessi della serie di Fourier.

$x(t)$ periodico in $t \longleftrightarrow X(f)$ discreto (campionato) in f

$x(t)$ discreto (campionato) in $t \longleftrightarrow X(f)$ periodico in f

Impedenza complessa (1/6)

Applicando la trasformata di Fourier alle grandezze elettriche, si possono esprimere la tensione e la corrente nel dominio della frequenza:

$$V(f) = \mathscr{F}(v(t))$$

$$I(f) = \mathscr{F}(i(t))$$

Per una resistenza R, la legge di Ohm nel dominio della frequenza è:

$$V(f) = RI(f)$$

Impedenza complessa (2/6)

La relazione corrente-tensione per un'induttanza nel dominio del tempo è:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = Li'(t)$$

e la relazione nel dominio della frequenza si ricava trasformando (e usando la formula per la derivata):

$$V(f) = j2\pi f L I(f)$$

Impedenza complessa (3/6)

Per un condensatore la relazione corrente-tensione è:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

e la relazione nel dominio della frequenza si ricava trasformando (e usando la formula per l'integrale):

$$V(f) = \frac{1}{j2\pi f C} I(f)$$

Impedenza complessa (4/6)

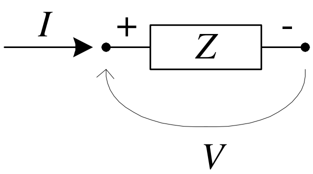
Dal confronto delle tre equazioni:

$$V(f) = RI(f)$$
$$V(f) = j2\pi fLI(f)$$
$$V(f) = \frac{1}{j2\pi fC}I(f)$$

si vede che è opportuno definire l'**impedenza complessa** $Z(f)$ (funzione della frequenza), in modo da poter scrivere, per tutti e tre i bipoli:

$$V(f) = Z(f)I(f)$$

Impedenza complessa (5/6)



$$V(f) = Z(f)I(f)$$

L'impedenza si misura in ohm (come la resistenza).

- Per un resistore, l'impedenza non dipende dalla frequenza: $Z(f) = R$.
- Per un'induttanza, l'impedenza è direttamente proporzionale alla frequenza: $Z(f) = j2\pi fL$.
- Per un condensatore, l'impedenza è inversamente proporzionale alla frequenza: $Z(f) = \frac{1}{j2\pi fC}$.

Impedenza complessa (6/6)

L'impedenza Z è una gradezza complessa; la sua parte reale è la **resistenza** R, mentre la parte immaginaria prende il nome di **reattanza** X:

$$Z = R + jX$$

Mentre la resistenza R può essere solo positiva (o nulla), la reattanza può essere positiva (come nel caso dell'induttanza) oppure negativa (come nel caso del condensatore).
Le impedenze in serie e in parallelo si combinano come le resistenze.
L'impedenza è lineare: per qualsiasi impedenza, un segnale di tensione sinusoidale alla frequenza f_0 produce un segnale di corrente sinusoidale alla stessa frequenza.

Ammettenza complessa

L'inverso dell'impedenza è l'**ammettenza** Y:

$$Y(f) = \frac{1}{Z(f)}$$

da cui risulta:

$$I(f) = Y(f)V(f)$$

L'ammettenza (che si misura in siemens) ha come parte reale la **conduttanza** G, mentre la parte immaginaria è la **suscettanza** B:

$$Y = G + jB$$

Risposta in frequenza (1/2)

Per un circuito lineare, la risposta ad un segnale sinusoidale in ingresso è sempre un segnale sinusoidale alla medesima frequenza.
La **risposta in frequenza** $H(f)$ di un circuito è definita come il rapporto tra i segnali di uscita e di ingresso nel dominio della frequenza.
Per un amplificatore di tensione:

$$H(f) = \frac{V_o(f)}{V_i(f)}$$

Solitamente, la risposta in frequenza (che è complessa) viene espressa sotto forma di **modulo** $|H(f)|$ e **fase** $\angle H(f)$ (cioè in coordinate polari nel piano complesso).

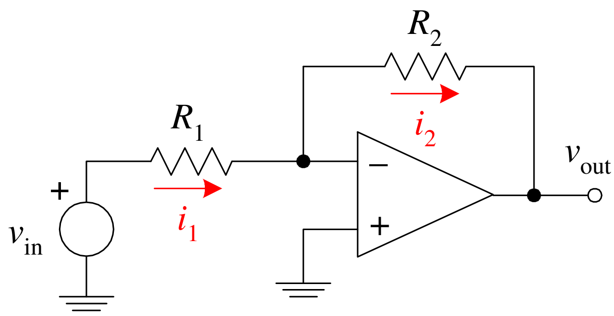
Risposta in frequenza (2/2)

In generale, indicando con $X_i(f)$ e $X_o(f)$ le trasformate di Fourier dei segnali in ingresso e in uscita da un circuito, la risposta in frequenza è:

$$H(f) = \frac{X_o(f)}{X_i(f)}$$

Se l'ingresso è unitario (nel dominio della frequenza), cioè se $X_i(f) = 1$, allora l'uscita (nel dominio della frequenza) è $H(f)$.
Ricordando che $X_i(f) = 1$ se $x_i(t) = \delta(t)$, concludiamo che la risposta in frequenza $H(f)$ è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso (o risposta impulsiva), che si indica con $h(t)$.

Amplificatore invertente

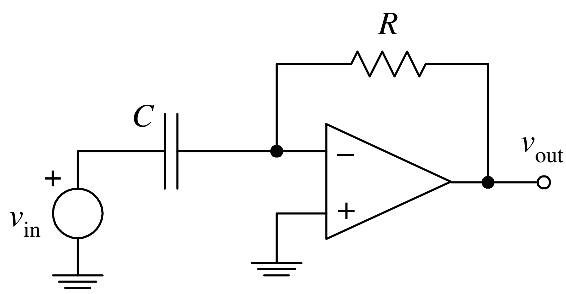


Applicando il principio della terra virtuale: $v^- = 0$, $i_1 = i_2$, si ottiene la soluzione:

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} v_{in}$$

L'amplificatore retroazionato ha un guadagno che dipende solo dal rapporto tra le due resistenze.

Circuito derivatore (1/2)



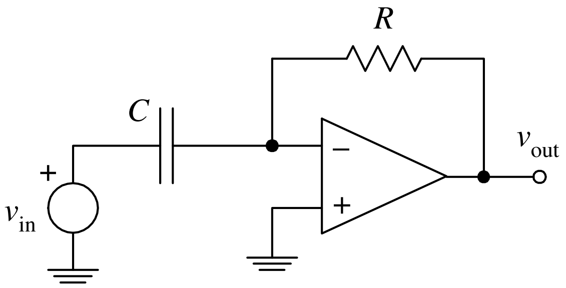
Applicando la KCL applicata all'ingresso invertente dell'amplificatore operazionale, si ha:

$$i_C(t) = i_R(t)$$

da cui:

$$C\frac{dv_{in}(t)}{dt} = -\frac{v_{out}(t)}{R}$$

Circuito derivatore (2/2)

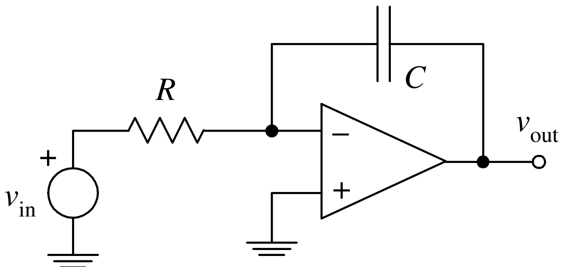


Risolvendo rispetto a $v_{\text{out}}(t)$ si ottiene:

$$v_{\text{out}}(t) = -RC\frac{dv_{\text{in}}(t)}{dt} = -\tau\frac{dv_{\text{in}}(t)}{dt}$$

$\tau = RC$ è la *costante di tempo* del circuito.

Circuito integratore



Per questo circuito, risulta:

$$\frac{v_{\text{in}}(t)}{R} = C\frac{dv_{\text{out}}(t)}{dt}$$

e risolvendo rispetto a $v_{\text{out}}(t)$ si ottiene:

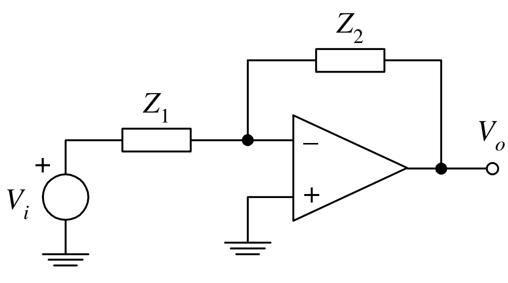
$$v_{\text{out}}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_{\text{in}}(t)\,dt + v(0)$$

Circuiti con più capacità e induttanze

Tutte le capacità e tutte le induttanze hanno una relazione tensione-corrente espressa mediante una derivata (o un integrale) nel tempo.
In generale, per trovare la soluzione nel dominio del tempo di un circuito contenente N elementi circuitali C o L bisogna risolvere una equazione differenziale di ordine N.

Per evitare le complessità di calcolo, invece di ricavare la risposta nel *dominio del tempo*, si ricava la risposta nel **dominio della frequenza** usando la *trasformata di Fourier*; questo procedimento richiede di risolvere una equazione algebrica di grado N.

Integratore e derivatore in f (1/2)



Il guadagno nel dominio della frequenza si calcola in modo analogo al caso dell'amplificatore invertente; risulta:

$$H(f) = \frac{V_o(f)}{V_i(f)} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Integratore e derivatore in f (2/2)

Per l'integratore, si ha $Z_1 = R$ e $Z_2 = \frac{1}{j2\pi fC}$:

$$H(f) = -\frac{1}{j2\pi fCR}$$

Per il derivatore, $Z_1 = \frac{1}{j2\pi fC}$ e $Z_2 = R$:

$$H(f) = -j2\pi fCR$$