LA TRASFORMATA DI FOURIER: PROPRIETA' ed ESEMPI

Proprieta' della TDF (1)

$x(t)$ TDF $X(f)$

LINEARITA': la TDF della combinazione lineare (somma pesata) di due segnali e' uguale alla combinazione lineare delle TDF dei due segnali.

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \quad \text{TDF} \quad a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$$

SCALATURA TEMPORALE

$$z(t)=x(at) \quad \text{TDF} \quad Z(f)=(1/|a|)X(f/a)$$

$$a=-1,\; z(t)=x(-t) \quad \text{TDF} \quad Z(f)=X(-f)$$

DUALITA':

$$z(t)=X(-t) \quad \text{TDF} \quad Z(f)=x(f)$$

$$z(t)=X(t) \quad \text{TDF} \quad Z(f)=x(-f)$$

SIMMETRIA: la TDF di una segnale REALE gode di simmetria complessa coniugata (simmetria Hermitiana). La parte reale e il modulo sono simmetrici rispetto all'origine (pari), la parte immaginaria e la fase sono antisimmetriche rispetto all'origine (dispari).

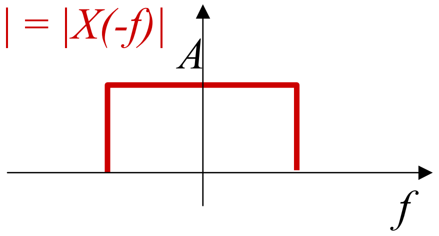
$$x(t) \text{ reale} \quad \text{TDF} \quad X(f) = X^*(-f)$$

Proprieta' della TDF (2)

TDF di una segnale REALE

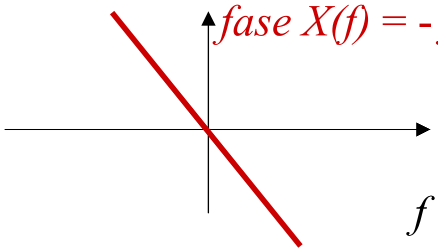
$|X(f)| = |X(-f)|$

Modulo



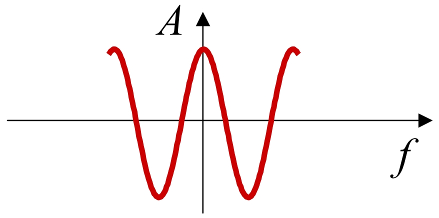
$fase\ X(f) = -\ fase\ X(-f)$

Fase



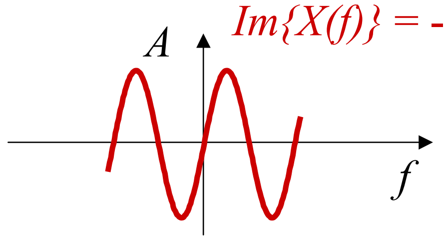
$Re\{X(f)\} = Re\{X(-f)\}$

Reale



$Im\{X(f)\} = -\ Im\{X(-f)\}$

Immag.



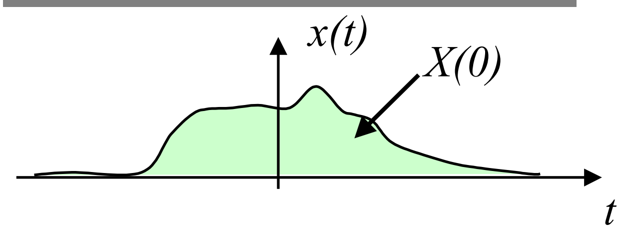
Casi particolari

$x(t)$ reale pari	TDF	$X(f)$ reale pari
$x(t)$ reale dispari		$X(f)$ immaginario dispari

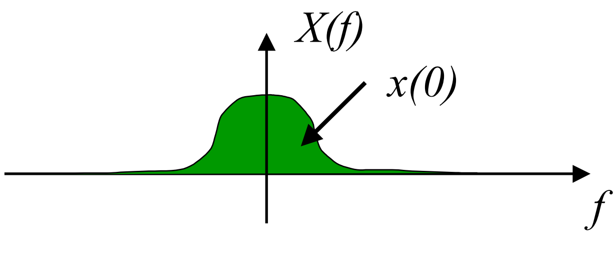
Proprieta' della TDF (3)

Valori nell'origine

$$X(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \exp\{-j2\pi ft\} dt \right]_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$



$$x(0) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot \exp\{j2\pi ft\} df \right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$$



Proprieta' della TDF (4)

Coniugazione:

$$x^*(t) \xrightarrow{\text{TDF}} X^*(-f)$$

Traslazione nei tempi: la TDF del segnale ritardato e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per un esponenziale complesso

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{TDF}} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Traslazione nelle frequenze: traslare in frequenza la TDF del segnale, equivale a moltiplicare il segnale nei tempi per un esponenziale complesso

$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{\text{TDF}} X(f-f_0)$$

Esempio: la trasformata di Fourier del coseno

Un impulso di area unitaria in frequenza ha come TDF inversa una costante unitaria nei tempi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \exp\{j2\pi\ ft\}\, df = 1$$

Quindi la TDF di una costante unitaria e' un impulso nelle frequenze.

La trasformata di Fourier del coseno si ricava da quella della costante utilizzando le proprieta' di traslazione nelle frequenze e di linearita':

$$y(t) = \cos(2\pi\ f_o t) = \frac{1}{2}\exp\{j2\pi\ f_o t\} + \frac{1}{2}\exp\{-j2\pi\ f_o t\}$$

$$\Big\downarrow \text{TDF}$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_o) + \frac{1}{2}\delta(f + f_o)$$

Esempio: la trasformata di Fourier del seno

La trasformata di Fourier del seno si ricava da quella della costante utilizzando le proprieta' di traslazione nelle frequenze e di linearita':

$$y(t) = \sin(2\pi\ f_o t) = \frac{j}{2}\exp\{-j2\pi\ f_o t\} - \frac{j}{2}\exp\{j2\pi\ f_o t\}$$

$$\Big\downarrow \text{TDF}$$

$$Y(f) = \frac{j}{2}\delta(f+f_o) - \frac{j}{2}\delta(f-f_o)$$

Proprieta' della TDF (5)

Derivazione: la TDF del segnale derivato nel tempo e' uguale a quella del segnale originale moltiplicata per una rampa immaginaria in frequenza:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt}} \xrightarrow{\text{TDF}} \boxed{j2\pi\ f\ X(f)}$$

Dualmente:

$$\boxed{j2\pi\, t\, x(t)} \xrightarrow{\text{TDF}} \boxed{-\frac{dX(f)}{df}}$$

Integrazione:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau} \xrightarrow{\text{TDF}} \boxed{\frac{1}{j2\pi\ f}X(f) + \frac{1}{2}\delta(f)}$$

Dualmente:

$$\boxed{\frac{-1}{j2\pi\ t}x(t) + \frac{1}{2}\delta(t)} \xrightarrow{\text{TDF}} \boxed{\int_{-\infty}^{f} X(\eta)d\eta}$$

Proprieta' della TDF (6)

Moltiplicazione nelle frequenze: la TDF inversa del prodotto delle TDF di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione dei segnali nei tempi. L'integrale di convoluzione e' un operatore utilizzato, per esempio, per descrivere come vengono modificati i segnali quando passano attraverso sistemi lineari tempo-invarianti.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad X(f)Y(f)$$

Moltiplicazione nei tempi (modulazione): la TDF del prodotto di due segnali e' uguale all'integrale di convoluzione delle due TDF (nelle frequenze).

$$x(t)y(t) \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} X(\xi)Y(f-\xi)d\xi$$

Modulazione d'ampiezza:

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \quad \xrightarrow{\text{TDF}} \quad (1/2)(X(f+f_0)+X(f-f_0))$$

Proprieta' della TDF (7)

Relazione di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$$

Ponendo y(t)=x(t) si ottiene che l'energia di un segnale e' uguale all'integrale del modulo quadrato della sua TDF

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$|X(f)|^2$ integrata su tutto l'asse delle frequenze fornisce l'energia del segnale.

Quindi $|X(f)|^2$ rappresenta l'energia del segnale in ogni intervallo di frequenze infinitesimo *df*.

$|X(f)|^2$ viene detta DENSITA' SPETTRALE DI ENERGIA

Proprieta' della TDF (8)

Funzione di autocorrelazione:

$$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

Dalla relazione di Parseval si ottiene:

$$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)X^*(f)e^{j2\pi f\tau}df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}df \Rightarrow F[r_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

cioe', la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione e' la densita' spettrale di energia.

Proprieta':

1. $r_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau)$
2. $r_x(\tau) = r_x^*(-\tau)$ (la trasformata di $r_x(\tau)$ e' reale $\Rightarrow$ vale la simmetria Hermitiana)
3. Se $x(t)$ e' reale l'autocorrelazione e' reale pari: $r_x(\tau) = r_x(-\tau)$
4. $r_x(0) = E_x$ (dalla definizione)
5. $r_x(0) \geq |r_x(\tau)|$

Proprieta' della TDF (9)

Funzione di cross-correlazione:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$$

Dalla relazione di Parseval (per $y(t) = x(t+\tau)$) si ottiene:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad \Rightarrow F[r_{xy}(\tau)] = X(f)Y^*(f)$$

cioe', la trasformata di Fourier della funzione di cross-correlazione e' il cross-spettro tra i segnali *x* e *y* (prodotto della trasformata del primo per quella coniugata del secondo).

Proprieta':

1. $r_{xy}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau)$
2. $r_{xy}(\tau) = r_{yx}^*(-\tau)$
3. Se $x(t)$ e $y(t)$ sono reali la cross-correlazione e' reale e $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$
4. Se $y(t) = x(t-t_0)$: $r_{yx}(\tau) = r_x(\tau - t_0)$

La trasformata di Fourier di segnali periodici (1)

In generale, un segnale periodico *y(t)* di periodo T_0 si puo' esprimere in funzione del singolo periodo *x(t)*:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) \qquad x(t - nT_0) = x(t) * \delta(t - nT_0)$$

$$Y(f) = \mathcal{F}\left[x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)\right] = X(f) \cdot \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)\right]$$

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)\right] = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

$$\Rightarrow\ Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

La trasformata di Fourier *Y(f)* del segnale periodico *y(t)* e' una sequenza di impulsi alle frequenze $f = k/T_0$.

La trasformata di Fourier di segnali periodici (2)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0) \quad \Rightarrow \quad Y(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

La trasformata di Fourier *Y(f)* del segnale periodico *y(t)* si ottiene a partire dalla trasformata di Fourier *X(f)* del singolo periodo *x(t):*

1. moltiplicando *X(f)* per un treno di impulsi alle frequenze k/T_0
2. scalando il risultato per $1/T_0$.

Periodicizzare nei tempi *x(t)* con periodo T_0 equivale a campionare nelle frequenze *X(f)* con passo di campionamento $1/T_0$

Relazione fra serie e trasformata di Fourier di segnali periodici

Abbiamo visto che la trasformata di Fourier $Y(f)$ del segnale periodico $y(t)$ e' costituita da impulsi alle frequenze $f=k/T_0$:

$$Y(f) = f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_0)\delta(f-kf_0)$$

Dallo sviluppo in serie di Fourier di $y(t)$ si ottiene:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \cdot \exp\{j2\pi\ kf_0 t\} \Rightarrow Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \cdot \delta(f-kf_0)$$

Cioe' l'area degli impulsi alle frequenze $f=kf_0$ della trasformata di Fourier $Y(f)$ e' data dai campioni Y_k della serie di Fourier del segnale $y(t)$.

Inoltre, fra i coefficienti della serie Fourier Y_k e la trasformata di Fourier del singolo periodo $X(f)$ vale la relazione:

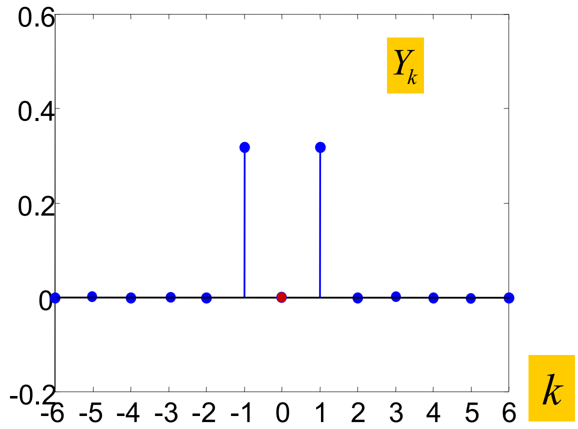
$$Y_k = f_0 X(kf_0) = \text{ area impulso in } kf_0$$

La trasformata di Fourier del coseno (2)

La serie di Fourier del coseno ricavata in precedenza e' costituita da due campioni di ampiezza *1/2* rispettivamente in *k= +1* e *k= -1*

$$y(t) = \cos(2\pi\ f_o t) \qquad Y_k = \begin{cases} 1/2 & \text{per } k = \pm 1 \\ 0 & \text{per } k \neq \pm 1 \end{cases}$$

La TDF del coseno si ottiene dalla serie di Fourier ponendo alle frequenze $f=kf_o$, impulsi di area pari ai campioni X_k della serie, dove f_o e' la frequenza fondamentale del segnale periodico



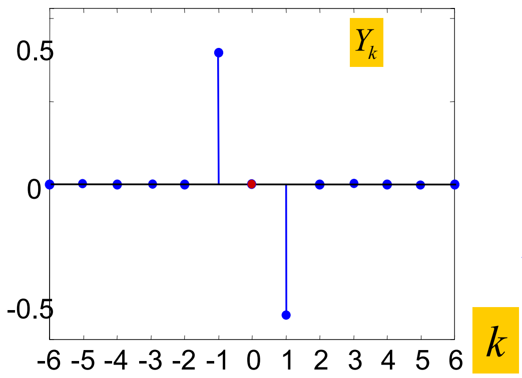
$$Y(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_o) + \frac{1}{2}\delta(f+f_o)$$

La trasformata di Fourier del seno (2)

La serie di Fourier del seno ricavata in precedenza e' costituita da due campioni immaginari di ampiezza $+j/2$ e $-j/2$ rispettivamente in $k= +1$ e $k= -1$

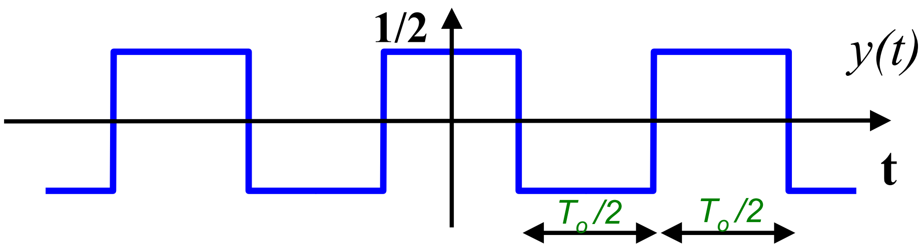
$$y(t) = \sin(2\pi \; f_o t) \quad \rightarrow \quad Y_k = \begin{cases} -\dfrac{j}{2} & \text{per } \; k = +1 \\ +\dfrac{j}{2} & \text{per } \; k = -1 \\ 0 & \text{per } \; k \neq \pm 1 \end{cases}$$

La TDF del seno si ottiene dalla serie di Fourier ponendo alle frequenze $f=kf_o$ impulsi di area pari ai campioni X_k della serie, dove f_o e' la frequenza fondamentale del segnale periodico



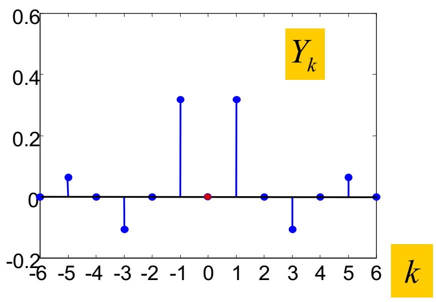
$$Y(f) = \frac{j}{2}\delta(f + f_o) - \frac{j}{2}\delta(f - f_o)$$

Esempio: l'onda quadra a media nulla



Serie di Fourier

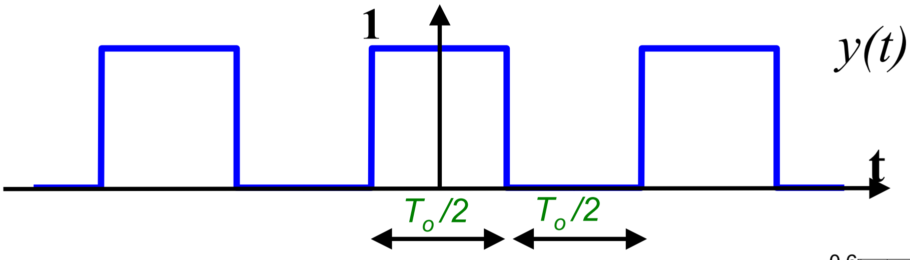
$$Y_k = \frac{1}{2}\frac{\sin \pi \; k/2}{\pi \; k/2} \quad \text{per } k \neq 0$$



Trasformata di Fourier

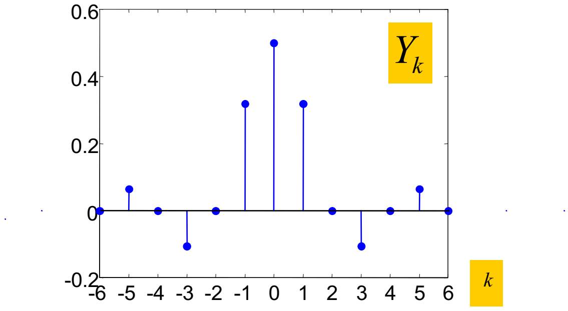
$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin \pi \; k/2}{\pi \; k/2} \; \delta\left(f - \frac{k}{T_o}\right) \quad \text{per } k \neq 0$$

Esempio: l'onda quadra a media non nulla (1)



Serie di Fourier

$$Y_k = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\frac{\pi k}{2}}$$



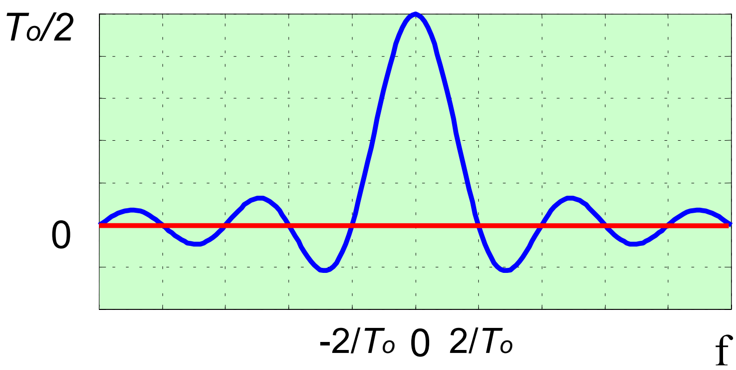
Trasformata di Fourier

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\frac{\pi k}{2}}\delta\left(f - \frac{k}{T_o}\right)$$

Esempio: l'onda quadra a media non nulla (2)

Trasformata di Fourier del singolo periodo *x(t) {rettangolo di ampiezza unitaria e durata To/2}*

$$X(f) = \frac{T_0}{2}\frac{\sin\frac{\pi T_o f}{2}}{\frac{\pi T_o f}{2}}$$

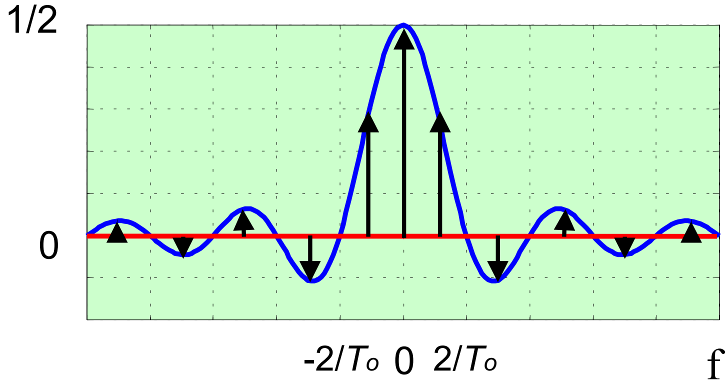


Trasformata di Fourier del segnale periodico *y(t)*

$$Y(f) = \frac{1}{T_o}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f)\delta\left(f - \frac{k}{T_o}\right)$$

$$= \frac{1}{T_o}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T_o}\right)\delta\left(f - \frac{k}{T_o}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{\frac{\pi k}{2}}\delta\left(f - \frac{k}{T_o}\right)$$



ESERCIZI PROPOSTI

1 Dati i segnali
a) $x(t)=\exp(j2\pi f_o t)$ b) $x(t)=\cos(2\pi f_o t)$ c) $x(t)=\delta(t)$
e i sistemi LTI con risposta in frequenza
a) $H(f)=10\exp(-j2\pi f/f_o)$ b) $H(f)=\exp\{-|f/f_o| - j2\pi f/f_o\}$ c) $H(f)=1/(1+j f/f_o)$
che espressione hanno i segnali in uscita $y(t)$?

2 Dato il segnale $x(t)= 3\cos(\pi t / T_o)+5\cos(2\pi t / T_o)$ che passa attraverso un sistema LTI con risposta in frequenza $H(f)=\mathrm{rect}(f T_o/3)$, che espressione ha l'uscita $y(t)$?

3 Sia dato un segnale con Trasformata di Fourier $X(f)$ riportata in figura e un filtro con risposta in frequenza $H(f)$ riportata in figura. Disegnare la trasformata di Fourier $Y(f)$ dell'uscita.