Segnali (processi) aleatori (casuali)

Definizione di processo aleatorio

Descrizione statistica di un processo aleatorio

Media, potenza, varianza

Autocorrelazione e autocovarianza

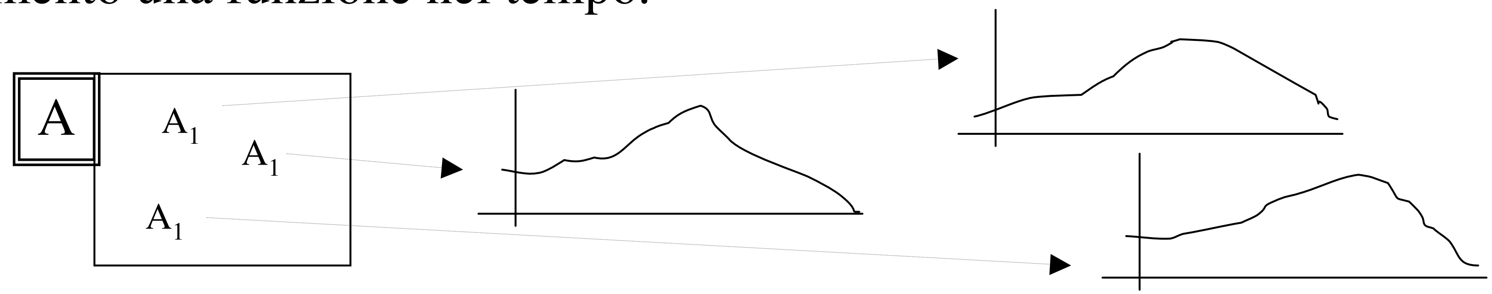
Filtraggio di un processo stazionario

Densità spettrale di potenza di processi stazionari

Processi ergodici

Processo aleatorio

- Un processo aleatorio è una relazione che lega al risultato (casuale) di un esperimento una funzione nel tempo.



- Noi considereremo solo i processi aleatori tempo-continui, che si rappresentano con la lettera maiuscola e la dipendenza dal tempo

$$X(\alpha_i, t) \rightarrow x_i(t)$$

- Attenzione: per *i* fissato, il segnale $x_i(t)$ NON è casuale, ma deterministico, mentre a $\underline{t}$ fissato $X(\underline{t})$ può assumere tutti i valori che le varie (infinite) $x_i(t)$ assumono in $\underline{t}$ e dunque $X_{\underline{t}} = X(\underline{t})$ è una variabile casuale.

Caratterizzazione statistica

- Dato che $X_t = X(\underline{t})$ è una variabile casuale, si potrà definire una funzione cumulativa di probabilità

$$F_X(x,\underline{t}) = P\big(X(\underline{t}) \le x\big)$$

- Tale funzione però non è sufficiente per caratterizzare il processo: a volte, ad esempio, serve sapere cosa succede al tempo t_1 e al tempo t_2: $F_X(x,\underline{t}) = P\big(X(\underline{t}) \le x\big)$
- … il che a sua volta richiede la conoscenza della funzione cumulativa congiunta (del secondo ordine):

$$F_X(x_1,x_2,t_1,t_2) = P\big(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\big)$$

- In generale, servirà la conoscenza della funzione cumulativa di probabilità di ordine n, per ogni possibile n!

$$F_X(x_1,x_2,\ldots,x_n,t_1,t_2,\ldots t_n) = P\big(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots, X(t_n) \le x_n\big)$$

Valor medio, potenza, varianza

- Per semplificarci la vita, è possibile ridursi a considerare solo alcuni indici statistici semplificati, come il valor medio:

$$m_X(t) = E\big(X(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \boxed{f_X(x,t)}\, dx \longrightarrow \boxed{f_X(x,t) = \frac{d}{dx} F_X(x,t)}$$

- …la potenza:

$$P_X(t) = E\left(X^2(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x,t)\, dx$$

- … e la varianza:

$$\sigma_X^2(t) = E\left(\left(X(t) - m_X(t)\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x(t)\right)^2 f_X(x,t)\, dx = P_X(t) - m_X^2(t)$$

- Si noti che la media NON corrisponde necessariamente ad una delle possibili realizzazioni del processo, cioè ad una $x_i(t)$.

Autocorrelazione e covarianza

- E' interessante considerare anche degli indici del secondo ordine, come la autocorrelazione (correlazione tra le variabili casuali corrispondenti a due istanti di tempo, t_1 e t_2):

$$R_X(t_1,t_2) = E\left(X(t_1)X(t_2)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

- … e la loro autocovarianza (misura indipendente dal valor medio):

$$C_X(t_1,t_2) = E\left(\left(X(t_1) - m_x(t_1)\right)\left(X(t_2) - m_x(t_2)\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1 - m_x(t_1)\right)\left(x_2 - m_x(t_2)\right) f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1\,dx_2$$

$$= R_X(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

- Si noti che si parla di **auto**correlazione e di **auto**covarianza perché, nonostante si considerino due istanti di tempo diversi, il processo è lo stesso.

Processi stazionari

- In un generico processo aleatorio, tutte le quantità introdotte precedentemente sono funzione del tempo, possono cambiare al variare degli istanti.
- Se tutte le funzioni statistiche che caratterizzano un processo sono invarianti rispetto al tempo, allora il processo si dice **stazionario in senso stretto.**

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, \ldots t_n + \Delta t)$$

- Si noti che l'uguaglianza deve valere per ogni Δt, il che è praticamente impossibile da verificare.
- Inoltre, la stazionarietà in senso stretto (o *forte*) significa che non posso distinguere due processi che sono diversi, ma differiscono tra loro solo per una traslazione nel tempo utilizzando misure statistiche.

Statistiche del 1° ordine per processi stazionari

- Se un processo è stazionario in senso stretto, la sua funzione densità di probabilità del primo ordine deve soddisfare $f_X(x,t) = f_X(x,t+\Delta t)$, il che significa che deve essere indipendente dal tempo.
- Di conseguenza, la media di un processo stazionario in senso stretto soddisfa la stessa condizione, cioè è costante nel tempo.

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\, dx = m_X$$

- … e similmente per le altre statistiche del primo ordine, come la potenza e la varianza:

$$P_x(t) = P_X \qquad \sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$$

Statistiche di ordine superiore

- La stazionarietà di ordine due implica che

$$f_x(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_x(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

- … e che, di conseguenza, la funzione densità di probabilità congiunta, così come le statistiche come la autocorrelazione e la autocovarianza, risulta dipendente solo dalla differenza t_1-t_2 e non dai particolari valori di t_1 e t_2.

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \, f_X(x_1, x_2, t_1 - t_2)\, dx_1\, dx_2 = R_X(t_1 - t_2)$$

- Generalizzando, si può affermare che, in un processo stazionario in senso stretto, la funzione densità di probabilità di ordine *n* dipenderà solo dalle *n-1* differenze di tempo t_1-t_2, t_2-t_3, …, t_{n-1}-t_n che ci sono tra gli *n* istanti di tempo t_1, t_2, …, t_n. Tali differenze, infatti, **sono indipendenti dalla traslazione nel tempo**.

Stazionarietà in senso lato

- Dato che la stazionarietà in senso stretto risulta praticamente impossibile da verificare, ci riduciamo a considerare una **stazionarietà in senso lato**, nel caso in cui siano valide:

$$m_X(t) = m_X$$
$$R_X(t_1,t_2) = R_x(t_1 - t_2)$$

- Facciamo un esempio:

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \qquad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{\theta - \pi}{2\pi}\right)$$

è stazionario in senso lato, mentre

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \qquad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi} rect\left(\frac{\theta - \pi/2}{\pi}\right)$$

non lo è.

Autocorrelazione di un processo stazionario

- La autocorrelazione di un processo stazionario può essere scritta nella stessa forma di quella di un segnale deterministico:

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_1+\tau) \rightarrow R_x(t_1-t_2) = R_X(\tau)$$

- … e per di più soddisfa le stesse condizioni:

$$R_X(0) = E\left(X^2(t)\right) = P_X$$

$$R_X(-\tau) = E\left(X(t)X(t-\tau)\right) = E\left(X(t+\tau)X(t)\right) = R_X(\tau)$$

$$R_X(0) \geq \left|R_X(\tau)\right| \quad \forall\tau$$

- In particolare, l'ultima condizione viene dall'espansione della condizione

$$E\left(\left(X(t) \pm X(t+\tau)\right)^2\right) \geq 0$$

$$E\left(X^2(t) + X^2(t+\tau) \pm 2X(t)X(t+\tau)\right) \geq 0$$

$$R_X(0) + R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0$$

Filtraggio di un processo stazionario

- Se un processo aleatorio *X(t)* passa in un filtro, quanto ne esce può essere scritto come $Y(t) = X(t) * h(t)$, dove *h(t)* è la risposta impulsiva del filtro e la convoluzione va intesa nel senso che, ad ogni funzione $x_i(t)$ si associa una funzione $y_i(t) = x_i(t) * h(t)$
- In generale, però, non si riesce a sapere cosa succede delle funzioni densità di probabilità congiunte in uscita a partire da quelle in ingresso.
- Limitandoci alla media, si può osservare che

$$m_Y(t) = E(Y(t)) = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, X(t-\tau)\, d\tau\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(h(\tau)\, X(t-\tau))\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) E(X(t-\tau))\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) m_X(t-\tau)\, d\tau = h(t) * m_X(t)$$

… cioè il filtro agisce "normalmente" sulla parte "deterministica" del processo aleatorio.

Filtraggio di … (II)

- Per la autocorrelazione succede che

$$R_Y(t_1,t_2) = E\big(Y(t_1),Y(t_2)\big) = E\Big(X(t_1)*h(t_1)\cdot X(t_2)*h(t\ \ )\Big)$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(\alpha)h(t_1-\alpha)\,d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(\beta)h(t_2-\beta)\,d\beta\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\,\big(X(\alpha)h(t_1-\alpha)\cdot X(\beta)h(t_2-\beta)\big)\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-\alpha)h(t_2-\beta)E\big(X(\alpha)\,X(\beta)\big)\,d\alpha\,d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\alpha,\beta)\,h(t_1-\alpha)h(t_2-\beta)\;d\alpha\,d\beta =$$

$$= R_X(t_1,t_2)*h(t_1)*h(t_2)$$

- Perciò, se il processo in ingresso è stazionario (in senso lato) si ottiene dunque che la media in uscita è costante e l’autocorrelazione dipende solo dalla differenza dei tempi, cioè il processo in uscita è pure stazionario.

Filtraggio di … (III)

- Più precisamente, se il segnale in ingresso è stazionario si ricava che

$$m_Y(t) = h(t) * m_X(t) = h(t) * m_X = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = m_X H(0)$$

- … mentre per la autocorrelazione vale

$$R_Y(t,t-\tau) = R_X(t,t-\tau) * h(t) * h(t-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\left[R(t-\alpha,t-\tau) * h(t-\tau)\right]d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R(t-\alpha,t-\tau-\beta)\,d\alpha\,d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) R(-\alpha+\tau+\beta)\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta)\left[R(\beta+\tau) * h(\tau)\right]d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} h(-\gamma)\left[R(\tau-\gamma) * h(\tau)\right]d\gamma = R(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$$

- … e dunque anche il segnale in uscita è stazionario in senso lato.

Densità spettrale di potenza dei segnali stazionari

- I segnali aleatori stazionari non possono avere energia finita. Altrimenti, andrebbero a zero all'infinito, con loro la media, e questa non potrebbe essere costante come richiesto.
- Essendo segnali di potenza, si definisce la loro densità di potenza come ciò che si ottiene invertendo la loro autocorrelazione.

$$S_X(f) = F^{-1}\left(R_X(\tau)\right)$$

- $S_X(f)$ soddisfa le condizioni:

$$S_X(f) \text{ è reale e pari}$$

$$P_X = E\left(X^2(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df = 2\int_{0}^{+\infty} S_X(f)\,df$$

$$S_X(f) \geq 0$$

Processi ergodici

- Per caratterizzare un processo, fosse anche stazionario, dovremmo conoscerne tutte le funzioni campione (impossibile!).
- Ci farebbe comodo invece ricavare le informazioni statistiche sul processo da UNA SOLA funzione campione. La cosa è possibile se il processo è **ergodico**.
- Un processo ergodico nella media soddisfa:

$$m_X(t) = m_X = X_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)\,dt$$

- cioè la variabile casuale X_m, ottenuta mediando nel tempo ogni possibile funzione campione, ha una funzione densità di probabilità con media pari a m_X e varianza *nulla*.
- In pratica, si può calcolare la media su una *finestra mobile*

$$X_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)\,dt \qquad\qquad X_m = \lim_{t\to\infty} X_T$$