Segnale Analitico

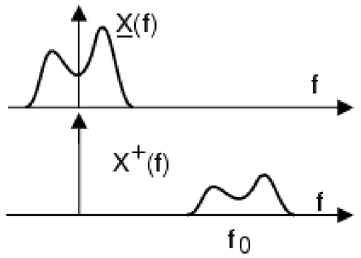
Il segnale analitico associato al segnale $x(t)$ corrisponde al suo contenuto a frequenze positive $x^{+}(t)$, introdotto al § 10.1.5; si può mostrare che $x^{+}(t)$ è esprimibile in termini di $\hat{x}(t)$, secondo l'espressione[10.15]:

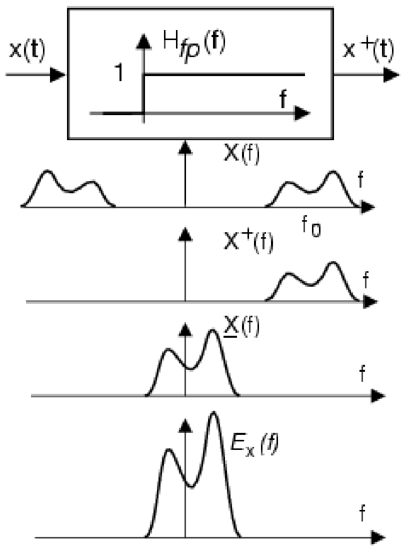
$$x^{+}(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + j\hat{x}(t)\right) \tag{10.1}$$

Molto utile è anche la relazione che lega il segnale analitico all'inviluppo complesso:

$$x^{+}(t) = \frac{1}{2}\underline{x}(t)e^{j\omega_0 t} \tag{10.2}$$

che si ottiene tenendo conto dalla (10.1), come illustrato alla nota[10.16]. Effettivamente, l'ultima relazione rappresenta il contenuto a frequenze positive di $x(t)$, a patto che $\underline{x}(t)$ sia di banda base con frequenza massima $W < f_0$; in tal caso infatti si ottiene che, trasformando la (10.2), risulta





$$X^{+}(f) = \mathcal{F}\left\{x^{+}(t)\right\} = \frac{1}{2}\underline{X}(f-f_0)$$

che giace tutta nel semipiano $f > 0$.

Alternativamente alla (10.1), si può ottenere $x^{+}(t)$ senza utilizzare $\hat{x}(t)$, pensandolo come il risultato del passaggio di $x(t)$ attraverso un filtro $H_{fp}(f)$[10.17] con funzione di trasferimento a gradino unitario:

$$x^{+}(t) = x(t) * h_{fp}(t)$$

Invertendo la (10.2), otteniamo ora $\underline{x}(t) = 2x^{+}(t)e^{-j\omega_0 t}$, che trasformata, ci consente di valutare l'espressione di $\underline{X}(f)$:

$$\underline{X}(f) = 2X^{+}(f+f_0)$$

Ricordando ora che $\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$, otteniamo

$$\mathcal{E}_{\underline{x}}(f) = 4\left|X^{+}(f+f_0)\right|^2 = 4\,\mathcal{E}_{x}^{+}(f+f_0)$$

Un risultato del tutto simile può essere ottenuto per segnali di potenza, ovvero

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\,\mathcal{P}_{x}^{+}(f+f_0)$$

Pertanto, la densità di potenza di $\underline{x}(t)$ si ottiene da quella a frequenze positive di $x(t)$, traslata nell'origine e moltiplicata per 4.

Footnotes

... l'espressione[10.15]

L'eguaglianza si dimostra valutandola nel domino nella frequenza, ricordando la definizione di filtro di Hilbert, in quanto risulta:

$$X^{+}(f) = \frac{1}{2}\left(X(f) + j\hat{X}(f)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{X(f) + j[-jX(f)]\} = X(f) & con\ f > 0 \\ \frac{1}{2}\{X(f) + j[jX(f)]\} = 0 & con\ f < 0 \end{cases}$$

infatti, a frequenze negative il prodotto $j \cdot j = -1$ costituisce uno sfasamento di π radianti per tutte le frequenze, provocando l'elisione tra $X(f)$ e $-X(f)$ per tutti i valori $f < 0$.

... nota[10.16]

Sviluppando il secondo membro di (10.2) si ottiene:

$$\frac{1}{2}\underline{x}(t)e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2}\left(x_c(t) + jx_s(t)\right)\left(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x_c(t)\cos\omega_0 t - x_s(t)\sin\omega_0 t\right) + j\left(x_c(t)\sin\omega_0 t + x_s(t)\cos\omega_0 t\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x(t) + j\hat{x}(t)\right)$$

che corrisponde al secondo membro di (10.1), e quindi a $x^{+}(t)$.

...[10.17]

Il pedice $_{fp}$ stà per *frequenze positive*.

Next: Esempi **Up:** Rappresentazione dei segnali modulati **Previous:** Filtro di Hilbert

---

Alessandro Falaschi (c) 2003
alef@infocom.uniroma1.it