Sistema dinamico

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In fisica e matematica, in particolare nella teoria dei sistemi dinamici, un **sistema dinamico** è un modello matematico che rappresenta un oggetto (sistema) con un numero finito di gradi di libertà che evolve nel tempo secondo una legge deterministica. Un sistema dinamico viene identificato da un vettore nello spazio delle fasi, lo spazio degli stati del sistema, dove "stato" è un termine che indica l'insieme delle grandezze fisiche, dette variabili di stato, che caratterizzano la dinamica del sistema.

Lo studio dei sistemi dinamici rappresenta uno dei più antichi e importanti settori della matematica e della fisica; si tratta di un modello matematico utilizzato per descrivere i sistemi meccanici nell'ambito della meccanica classica e nella sua riformulazione sviluppata dalla meccanica lagrangiana e dalla meccanica hamiltoniana, e che è presente in molti settori dell'ingegneria, come l'automatica e l'ingegneria dei sistemi. Le applicazioni sono molteplici, spaziando dai circuiti elettrici ai sistemi termodinamici.

Alla fine del diciannovesimo secolo, poi, Henri Poincaré osserva la possibilità di un comportamento fortemente irregolare di alcuni sistemi dinamici studiando il problema dei tre corpi: negli anni '50 del secolo successivo, in seguito agli esperimenti numerici del meteorologo Edward Lorenz, che studiando l'atmosfera terrestre rivelò la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, i risultati di Poincaré vennero presi in grande considerazione dalla comunità scientifica e posero le basi alla teoria del caos. Il comportamento caotico dei sistemi dinamici, la cui controparte matematica può raggiungere gradi di complessità che rendono vincolante l'utilizzo del calcolatore, è stato riscontrato in molti e diversi ambiti dello studio della natura della civiltà umana, tra cui la biologia e l'economia.

Si possono identificare due tipologie di sistema dinamico:

- Se l'evoluzione avviene ad intervalli discreti di tempo il sistema viene chiamato *sistema dinamico discreto* ed è definito dall'iterazione di una funzione
- Se l'evoluzione è continua e definita da un'equazione differenziale, il sistema viene chiamato *sistema dinamico continuo*.

Di particolare importanza sono i sistemi dinamici lineari, i più semplici da analizzare in quanto le equazioni non lineari non sono solitamente risolvibili in modo esatto. Tra i sistemi lineari, i sistemi lineari tempo-invarianti (sistemi LTI) vengono ampiamente utilizzati nella teoria dei segnali e nella teoria del controllo.

Una delle caratteristiche dei sistemi dinamici che viene studiata più spesso è la stabilità. Per esempio, è comune studiare la stabilità in termini di limitatezza delle uscite nei confronti di un ingresso limitato (stabilità esterna), oppure in termini di allontanamento da uno stato di equilibrio (stabilità interna).

Per analizzare matematicamente il comportamento di un sistema dinamico si utilizzano soprattutto due tipologie di descrizione, la rappresentazione in spazio di stato e il formalismo del dominio della frequenza (si veda la funzione di trasferimento nel caso di sistemi stazionari).

Indice

16 Collegamenti esterni

Introduzione

In meccanica classica un esempio elementare di sistema dinamico è fornito da un punto che si muove nello spazio. Il punto viene completamente caratterizzato dalla sua posizione $r(t)$ (un vettore dipendente da $t \in \mathbb{R}$) e dalla sua velocità $v(t) = \dot{r}(t) = dr/dt$. Lo stato di tale sistema è il vettore $(r(t), v(t)) \in \mathbb{R}^n$, dove $\mathbb{R}^n$ è lo spazio delle fasi utilizzato. Lo spazio delle fasi viene anche detto *spazio delle configurazioni* per il fatto che i suoi elementi rappresentano tutti gli stati possibili che il sistema può assumere. L'evoluzione temporale del punto è quindi data dalle due derivate:

$$\dot{r}(t) = v(t) \qquad \dot{v}(t) = a$$

dove a è l'accelerazione del punto (che dipende dalla somma delle forze a cui è soggetto). Definendo:

$$x(t) = (r(t), v(t))$$

il moto del punto può essere scritto con l'equazione ordinaria autonoma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Scegliendo un punto e una velocità iniziali $x_0 = (r_0, v_0)$, ovvero ponendo $x(t = 0) \equiv x_0$, si ottiene l'evoluzione del sistema a partire da x_0 (problema di cauchy per l'equazione differenziale).

Tutti i sistemi dinamici a tempo continuo vengono scritti in modo analogo, eventualmente con f che dipende esplicitamente dal tempo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

dove $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è una funzione almeno differenziabile. Tale sistema può essere ricondotto a quello autonomo ($f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) con un cambio di variabili.

La soluzione (x_0, t) al variare di t è la traiettoria (orbita) seguita dal sistema nello spazio delle fasi a partire da x_0. Nell'impostare formalmente lo studio di un sistema dinamico si fa in modo che la funzione f sia sufficientemente regolare da fornire una soluzione unica (teorema di esistenza e unicità), in accordo con il fatto che l'evoluzione del sistema a partire da un punto dato è unica.

Definizione

In generale, un sistema dinamico (T, M, Φ) è definito da un gruppo (o un semigruppo) T, che è l'insieme dei valori del parametro tempo t, e un insieme M, detto lo spazio delle fasi o *spazio degli stati*. La funzione di evoluzione temporale (flusso) $\Phi: U \subset T \times M \to M$ determina l'azione di T su M. Nella teoria ergodica M è uno spazio misurabile con misura di probabilità μ e Φ è una funzione misurabile che preserva μ, mentre nella cosiddetta *topologia dinamica* M è uno spazio topologico completo e Φ è una funzione continua (spesso anche invertibile).[1]

Nello specifico, per ogni t si può definire Φ tale che:

$$\Phi(0, x) = x$$

$$\Phi(t_1, x) \circ \Phi(t_2, x) = \Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x) \qquad t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I(x)$$

dove:

$$I(x) = \{t \in T : (t, x) \in U\}$$

Ciò rispecchia il fatto che la legge di evoluzione Φ del sistema non cambia essa stessa nel tempo. Le funzioni $\Phi(t, x)$ parametrizzate da t, con la legge di composizione $\Phi(t_1, x) \circ \Phi(t_2, x)$, formano un gruppo commutativo ad un parametro. Frequentemente nel caso discreto T coincide con $\mathbb{Z}$, mentre nel caso continuo T coincide con $\mathbb{R}$.[2]

Il grafico di Φ è la traiettoria del sistema nel tempo e l'insieme:

$$\gamma_{x_0} := \{\Phi(t, x_0) : t \in I(x_0)\}$$

è l'orbita passante per x_0 (ovvero l'immagine del flusso in x_0).

Un sottoinsieme $S \subset M$ è detto Φ-invariante se:

$$\Phi(t, x) \in S \qquad \forall x \in S \quad \forall t \in T$$

In particolare, affinché S sia invariante si deve verificare $I(x) = T$ per tutti gli $x \in S$, ovvero il flusso lungo x deve essere definito per tutti i punti di S ad ogni tempo.

Sistemi continui

Data una varietà S, sia $v : S \to S$ un campo vettoriale differenziabile, cioè che associa ad ogni punto $z \in S$ un vettore le cui coordinate sono legate alle coordinate di z (definite in un suo intorno rispetto a qualche base) tramite una funzione differenziabile. Un sistema dinamico è definito dall'equazione autonoma (l'equazione del moto per sistemi meccanici):

$$v(z) = \frac{dz}{dt}$$

Trattandosi di un'equazione differenziale ordinaria, il relativo teorema di esistenza e unicità della soluzione stabilisce che preso un punto iniziale z_0 esiste un intervallo $-a \leq t \leq b$, con $a, b > 0$, in cui il sistema dinamico ha una soluzione unica $z(t) = \phi_t(z_0)$.

Se la soluzione (traiettoria) esiste per tutti i tempi e per qualsiasi scelta del punto iniziale z_0 si ha che il tempo può scorrere nel verso contrario, ovvero è possibile predire il passato conoscendo uno stato del sistema nel futuro. In particolare, si verifica che $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ e l'insieme delle ϕ_t forma un gruppo continuo ad un parametro di diffeomorfismi su S.

La struttura matematica che viene assegnata allo spazio delle fasi M dipende comunque dal contesto; solitamente è uno spazio topologico, in cui ha senso parlare di continuità nell'evoluzione temporale dello stato. Uno spazio topologico in cui è possibile l'utilizzo di strumenti metrici e differenziali è ad esempio la varietà differenziabile, una delle strutture più utilizzate in quanto risulta particolarmente adatta per modellare i sistemi fisici. Per i sistemi nei quali allo stato viene associata una nozione di misura, ad esempio una probabilità, si utilizza uno spazio misurabile. Si richiede inoltre che il flusso Φ sia compatibile con la struttura di M: nel caso in cui M sia rispettivamente uno spazio topologico, uno spazio misurabile, una varietà differenziabile o una varietà complessa, Φ è un omeomorfismo, una funzione misurabile, un diffeomorfismo o una funzione olomorfa.

Sistemi discreti

I sistemi dinamici discreti sono definiti da un'iterazione del tipo:

$$X_{n+1} = f(X_n) \qquad n \geq 0$$

di una funzione $f : S \to S$, con $S \subset \mathbb{R}^n$. Può essere vista come un'equazione alle differenze:

$$X_{n+1} - X_n = f(X_n) - X_n \qquad n \geq 0$$

che definendo $F(X_n) = f(X_n) - X_n$ assume la stessa forma dell'equazione differenziale ordinaria del caso continuo.

Le orbite di un sistema discreto sono una successione di stati $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Il gruppo di trasformazioni è quindi dato dall'insieme:

$$G = \{Id, f, f^2, f^3, \dots f^n, \dots\}$$

dove l'espressione f^k indica la composizione di funzioni $f \circ \cdots \circ f$ di f con sé stessa iterata k volte.

Classificazione in base a ingressi e uscite

In ambito ingegneristico i sistemi dinamici vengono classificati in base al numero di variabili d'ingresso e d'uscita, si hanno infatti:

- sistemi a singolo ingresso e singola uscita (*SISO*, dall'inglese *single input-single output*);
- sistemi a ingresso multiplo e uscita multipla (*MIMO*, dall'inglese *multiple input-multiple output*);

e meno frequentemente:

- sistemi a singolo ingresso e uscita multipla (*SIMO*, dall'inglese *single input-multiple output*);
- sistemi a ingresso multiplo e singola uscita (*MISO*, dall'inglese *multiple input-single output*).

Sistemi lineari

Una classe molto importante di sistemi dinamici è quella dei sistemi lineari, in cui il legame tra variabili di ingresso e l'uscita è lineare. Sono utilizzati ad esempio nella teoria dei segnali o nella teoria dei circuiti, e spesso sono analizzati in frequenza tramite l'utilizzo di trasformate integrali, come la trasformata di Fourier o la trasformata di Laplace.

Un sistema lineare di n stati $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, m input $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e q uscite $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ viene descritto da un'equazione del tipo:[3]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t)$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q\times m}$ sono matrici (che nel caso stazionario non dipendono dal tempo).

Sistemi lineari e stazionari

Un sistema dinamico lineare e stazionario è anche detto *lineare tempo-invariante*, abbreviato spesso con la sigla LTI (dall'inglese *Linear Time-Invariant*). Nel caso di un sistema continuo, è caratterizzato dal fatto che l'uscita $y(t)$ per un segnale in ingresso $x(t)$ è descritta dalla convoluzione:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \cdot h(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

dove $h(t)$ è la risposta impulsiva, ovvero la risposta del sistema quando l'ingresso $x(t)$ è una funzione a delta di Dirac. Se la funzione $h(\tau)$ è nulla quando $\tau < 0$ allora $y(t)$ dipende soltanto dai valori assunti da x precedentemente al tempo t, ed il sistema è detto *causale*.

Un sistema a tempo discreto trasforma la successione in ingresso $\{x\}$ in un'altra successione $\{y\}$, data dalla convoluzione discreta con la risposta h alla delta di Kronecker:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot h[k]$$

Gli elementi di $\{y\}$ possono dipendere da ogni elemento di $\{x\}$. Solitamente $y[n]$ dipende maggiormente dagli elementi in prossimità del tempo n.

I sistemi lineari stazionari sono spesso descritti nel dominio della frequenza (risposta in frequenza) attraverso la funzione di trasferimento, definita come la trasformata di Laplace della risposta all'impulso a Delta.

Sistemi strettamente propri

Un ulteriore classificazione per i sistemi lineari li divide in *strettamente propri* (o *puramente dinamici*) quando l'uscita dipende esclusivamente dagli stati del sistema, e in tal caso nella rappresentazione matriciale ciò corrisponde a una matrice $D(t)$ nulla, mentre si parla di *sistema proprio* in tutti gli altri casi. Un caso particolare di sistema proprio si ha quando è la matrice $C(t)$ ad azzerarsi, in tal caso il sistema è detto *non dinamico* e non è necessario ricorrere a variabili di stato per rappresentarlo, poiché il legame fra ingresso e uscita è istantaneo.[4] È possibile dimostrare che un sistema puramente dinamico ha funzione di trasferimento con grado del numeratore minore a quello del denominatore mentre un sistema non dinamico ha, ovviamente, funzione di trasferimento con grado zero.

Stabilità

Si possono definire diversi tipi di stabilità per un sistema dinamico, ad esempio la stabilità esterna, anche detta *stabilità BIBO* (da *Bounded Input, Bounded Output*), ovvero la proprietà di avere un'uscita limitata se l'ingresso è limitato, oppure la stabilità interna, che si riferisce alla capacità di tornare in una configurazione di equilibrio dopo una perturbazione dello stato di equilibrio stesso. La stabilità esterna viene generalmente utilizzata per analizzare il comportamento di sistemi lineari stazionari (per i quali si valutano i poli della funzione di trasferimento), mentre la stabilità interna sfrutta la rappresentazione in spazio di stato del sistema ed è stata studiata in particolare da Aleksandr Michajlovič Ljapunov.

L'analisi della stabilità di un sistema meccanico è collegata con il fatto che il sistema, se lasciato libero di evolvere, tende spontaneamente a portarsi in una configurazione dove la sua energia potenziale è minima: tale configurazione che corrisponde ad uno stato di equilibrio stabile (si veda il teorema di Lagrange-Dirichlet).

Stabilità esterna

Un sistema è stabile esternamente (BIBO stabile) se ad un ingresso limitato corrisponde una uscita limitata. La limitatezza di una funzione scalare f è generalmente definita in tale contesto dal fatto che esiste un $M < \infty$ tale che:

$$\sup_{t \geq 0} |f(t)| < M$$

Nel caso di sistemi dinamici lineari, un sistema lineare è BIBO stabile se e solo se la risposta impulsiva $h(t)$ è assolutamente integrabile, cioè esiste un $M' < \infty$ tale che:[5]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < M'$$

Stabilità interna

Stabilità strutturale

Controllabilità e osservabilità

I concetti di controllabilità e osservabilità sono stati introdotti da Kalman nel 1960 e sono alla base della teoria del controllo. Informalmente, un sistema è controllabile se è possibile portarlo in qualsiasi configurazione finale agendo opportunamente sull'ingresso in un tempo finito; viceversa, è osservabile se dall'uscita è possibile risalire allo stato del sistema. Nei sistemi lineari controllabilità e osservabilità sono due proprietà duali.

Sistemi lineari

Dato un sistema dinamico lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

dove c^T è un vettore costante, si consideri la matrice:

$$T = [c^T \quad c^T A \quad c^T A^2 \quad \dots \quad c^T A^{n-1}]^T$$

Il sistema è completamente osservabile se il rango di T è massimo.

Considerando invece la matrice:

$$R = [b \quad Ab \quad A^2 b \quad \dots \quad A^{n-1} b]$$

il sistema è completamente controllabile se la matrice ha rango massimo.

Definendo il sistema duale:[6]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^T x + cu \\ y &= b^T x \end{aligned}$$

si dimostra che il sistema di partenza è completamente osservabile se e solo se il sistema duale è completamente controllabile, ed è completamente controllabile se e solo se il sistema duale è completamente osservabile.

Sistemi non lineari

Dato un sistema dinamico definito su una varietà $M \in C^\infty$ di dimensione m:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u) \qquad x \in M \\ y &= g(x)\end{aligned}$$

con $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^l$ l'ingresso, $y \in \mathbb{R}^n$ l'uscita e $f, g \in C^\infty$, i problemi di controllabilità si traducono nel verificare se lo spazio delle fasi M è sufficientemente grande da contenere tutti gli stati possibili (altrimenti il sistema non è osservabile) o se, al contrario, contiene stati che il sistema non può raggiungere (il sistema non è controllabile).

Una descrizione matematica comunemente utilizzata considera l'algebra di Lie F di campi vettoriali sullo spazio delle fasi M generata dal campo vettoriale $f(\cdot, u)$, con $u \in \Omega$ un controllo costante: se la dimensione dell'algebra è costante esiste un'unica sotto-varietà $M' \subset M$ tangente lo stato iniziale x_0 contenente tutte le orbite raggiungibili dal sistema (andando avanti o all'indietro nel tempo) passanti per x_0. Se la dimensione di $F(x_0)$ è m allora $M = M'$ e il sistema è in qualche modo controllabile; in caso contrario, se la dimensione è minore di m si considera solo l'insieme M' in cui il sistema è controllabile.[7]

Sistemi fisici

La dinamica dei sistemi fisici può essere caratterizzata dal fatto che il loro moto tra due punti di coordinate generalizzate $\mathbf{q}(t_1)$ e $\mathbf{q}(t_2)$ segue un cammino che rende stazionario, ovvero a variazione nulla, il funzionale azione:[8]

$$\delta \mathcal{S} = 0$$

in accordo con il principio di minima azione (principio variazionale di Hamilton). L'azione è l'integrale nel tempo della lagrangiana $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$:[9]

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

dove $L \in C^2[t_1, t_2]$. Si dimostra che L così definita soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$$

Rendere stazionaria l'azione corrisponde a minimizzare l'energia del sistema considerato, e solitamente si fa corrispondere all'energia totale del sistema una funzione $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, detta *hamiltoniana* e introdotta nel 1835 da William Rowan Hamilton, che dipende dalle coordinate generalizzate $\mathbf{q}$ e dai rispettivi momenti coniugati:

$$p_j = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \qquad \mathbf{p} = \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

L'hamiltoniana è data dalla somma $\mathcal{H} = T + V$ dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale V del sistema, ed è la trasformata di Legendre della lagrangiana L:[10][11]

$$\mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = [\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)]_{\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}$$

La formalizzazione di un problema dinamico tramite il principio di minima azione (valido per sistemi olonomi e monogenici) è alla base della riformulazione della meccanica classica sviluppata dalla meccanica hamiltoniana e lagrangiana.

In particolare le equazioni di Hamilton:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}$$

sono equivalenti alle equazioni del moto di Eulero-Lagrange, a loro volta equivalenti alla legge di Newton.[12]

Il principio di conservazione dell'energia viene poi espresso, in tale contesto, dicendo che $\mathcal{H}$ è un integrale primo delle equazioni di Hamilton, oppure con il fatto che la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Più in generale, per il teorema di Noether ad ogni simmetria della lagrangiana, ovvero ad ogni trasformazione infinitesima continua delle coordinate $(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$ che lascia inalterata $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$, corrisponde una quantità conservata.

Sistemi ergodici

Teoria delle biforcazioni

Un punto fisso (in generale un punto periodico) è un punto nello spazio delle fasi (cioè uno stato) che rimane invariato durante l'evoluzione del sistema. Un insieme invariante è un insieme di stati che viene mandato in sé stesso dall'evoluzione del sistema, eventualmente spostando i singoli stati all'interno dell'insieme, e un attrattore è un insieme invariante a cui le orbite si avvicinano per tempi che tendono all'infinito.

Caos

Rappresentazione grafica

Nell'ingegneria dei sistemi un sistema può essere modellizzato graficamente tramite una scomposizione in un insieme di sottosistemi collegati tra loro in vario modo (serie, parallelo, retroazione ecc...), ciascuno dei quali è identificato da uno *scatolotto* il cui funzionamento o comportamento è descritto da una funzione di sottoprocesso che esso svolge all'interno del sistema generale. Lo schema risultante si darà schema a blocchi del sistema (si veda Modello black box).

Esempi

Esempi di sistemi dinamici continui sono:

- Il sistema preda-predatore di Volterra Lotka per la dinamica delle popolazioni
- Il sistema di Lorenz per l'evoluzione delle condizioni meteorologiche

Esempi di sistemi dinamici discreti sono:

- la mappa logistica
- la mappa di Hénon
- la mappa standard

Note

1. ^ Treccani: Enciclopedia del Novecento II Supplemento (1998) - Sistemi dinamici (http://www.treccani.it/enciclopedia/sistemi-dinamici_(Enciclopedia_del_Novecento)/)
2. ^ (EN) Jinpeng An - Homogeneous Dynamics (http://www.math.pku.edu.cn/teachers/anjp/homogeneous_dynamics.pdf)
3. ^ Giovanna Finzi - Classificazione dei sistemi dinamici (http://automatica.ing.unibs.it/mco/ms/discreto/indice/classificazione.html)
4. ^ Classificazione dei sistemi dinamici (http://automatica.ing.unibs.it/mco/ms/discreto/indice/classificazione.html) su unibs.it
5. ^ (EN) Mauricio de Oliveira - Stability (http://maecourses.ucsd.edu/~mdeolive/mae280a/lecture14.pdf)
6. ^ (EN) William J. Terrel - Controllability, Observability, and Duality (https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Terrell705-719.pdf)
7. ^ (EN) Robert Hermann, Arthur J. Krener - Nonlinear Controllability and Observability (https://www.math.ucdavis.edu/~krener/1-25/10.IEEETAC77.pdf)
8. ^ (EN) Analytical Mechanics, L.N. Hand, J.D. Finch, Cambridge University Press, 2008, ISBN 978-0-521-57572-0
9. ^ (EN) Simon J.A. Malham - An introduction to Lagrangian and Hamiltonian mechanics (http://www.macs.hw.ac.uk/~simonm/mechanics.pdf)
10. ^ (EN) Britannica - Hamiltonian function (http://www.britannica.com/science/Hamiltonian-function)
11. ^ (EN) L.N. Hand, J.D. Finch, *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, 2008, ISBN 978-0-521-57572-0
12. ^ (EN) Ernst Hairer - Lecture 1: Hamiltonian systems (http://www.unige.ch/~hairer/poly_geoint/week1.pdf)

Bibliografia

- (EN) V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, 1982, ISBN 0-387-96890-3.
- (EN) Jacob Palis and Wellington de Melo, *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*, Springer-Verlag, 1982, ISBN 0-387-90668-1.
- (EN) David Ruelle, *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*, Academic Press, 1989, ISBN 0-12-601710-7.
- (EN) Tim Bedford, Michael Keane and Caroline Series, *eds.*, *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*, Oxford University Press, 1991, ISBN 0-19-853390-X.
- (EN) Ralph H. Abraham and Christopher D. Shaw, *Dynamics—the geometry of behavior, 2nd edition*, Addison-Wesley, 1992, ISBN 0-201-56716-4.
- (EN) Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer and James A. Yorke, *Chaos. An introduction to dynamical systems*, Springer Verlag, 2000, ISBN 0-387-94677-2.
- (EN) Oded Galor, *Discrete Dynamical Systems*, Springer, 2011, ISBN 978-3-642-07185-0.
- (EN) Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge, 1996, ISBN 0-521-57557-5.
- (EN) James Meiss, *Differential Dynamical Systems*, SIAM, 2007, ISBN 0-89871-635-7.
- (EN) Morris W. Hirsch, Stephen Smale and Robert Devaney, *Differential Equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic Press, 2003, ISBN 0-12-349703-5.
- (EN) Julien Clinton Sprott, *Chaos and time-series analysis*, Oxford University Press, 2003, ISBN 0-

19-850839-5.

- (EN) Steven H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology chemistry and engineering*, Addison Wesley, 1994, ISBN 0-201-54344-3.
- (EN) Gerald Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Providence, American Mathematical Society, 2012, ISBN 978-0-8218-8328-0.
- (EN) Stephen Wiggins, *Introduction to Applied Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2003, ISBN 0-387-00177-8.

Voci correlate

- Analisi dei sistemi dinamici
- Attrattore
- Controllabilità
- Controllo automatico
- Ergodicità
- Funzione di trasferimento
- Identificazione di sistemi dinamici
- Meccanica lagrangiana
- Meccanica hamiltoniana
- Orbita (matematica)
- Punto di equilibrio
- Sistema dinamico lineare stazionario
- Stabilità esterna
- Stabilità interna
- Teoria delle biforcazioni
- Teoria del caos
- Teoria della stabilità

Altri progetti

- **Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it)** contiene immagini o altri file su **sistema dinamico (https://commons.wikimedia.org/wiki/Dynamical_system?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- *Sistema dinamico*, in *Tesauro del Nuovo soggettario*, BNCF, marzo 2013.
- (EN) D.V. Anosov, *Dynamical system*, in *Encyclopaedia of Mathematics*, Springer e European Mathematical Society, 2002.
- (EN) *Michael Proctor - Dynamical Systems* (PDF), *damtp.cam.ac.uk*.
- *Carla Dionisi - Sistemi dinamici* (PDF), *web.math.unifi.it*.
- (EN) *Evans M. Harrell II - Dynamical Systems and Chaos*, *mathphysics.com*.
- (EN) Eric W. Weisstein, *Dynamical System*, in *MathWorld*, Wolfram Research.