Teoria dei Segnali

La Convoluzione
(esercizi)

parte seconda

Esercizio n.8

Calcolare la convoluzione tra i due segnali :

$$x(t) = rect_{\Delta}(t - \Delta) - rect_{\Delta}(t - 2\Delta)$$

e

$$y(t) = rect_{2\Delta}(t - \Delta)$$

Conviene inizialmente disegnare i due segnali tra cui calcolare la convoluzione (fig.9.1).

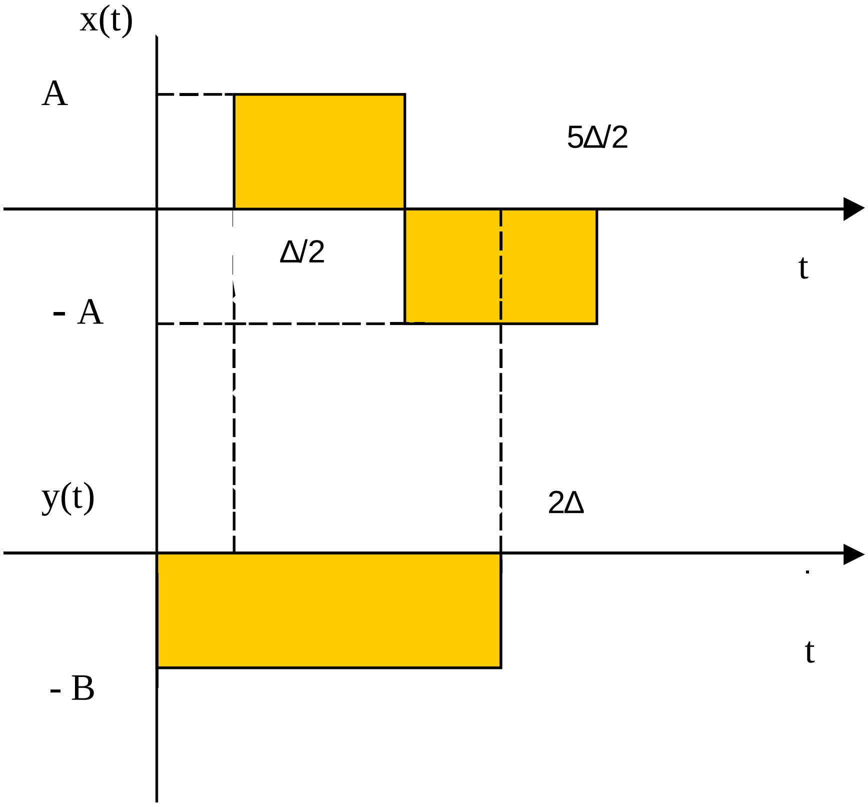


fig.8.1

Si può osservare che entrambi gli impulsi sono generati da due sub-impulsi di durata Δ, il primo traslato verso destra di $\Delta/2$. Questa traslazione può essere inizialmente trascurata, per poi inserirla nel risultato finale, secondo quanto detto nell'introduzione.
La inversione di y(t) porta alla situazione individuata dall'indice A nella fig. 8.2. Poiché la convoluzione tra impulsi rettangolari deve portare alla presenza di segmenti rettilinei, per valutare la convoluzione è sufficiente individuare i valori che si ottengono nei punti in cui le rette cambiano pendenza: sono le situazioni indicate dagli indici B, C, D, E nella stessa fig. 8.2. che corrispondono a traslazioni di Δ, 2Δ, 3Δ e 4Δ rispettivamente.

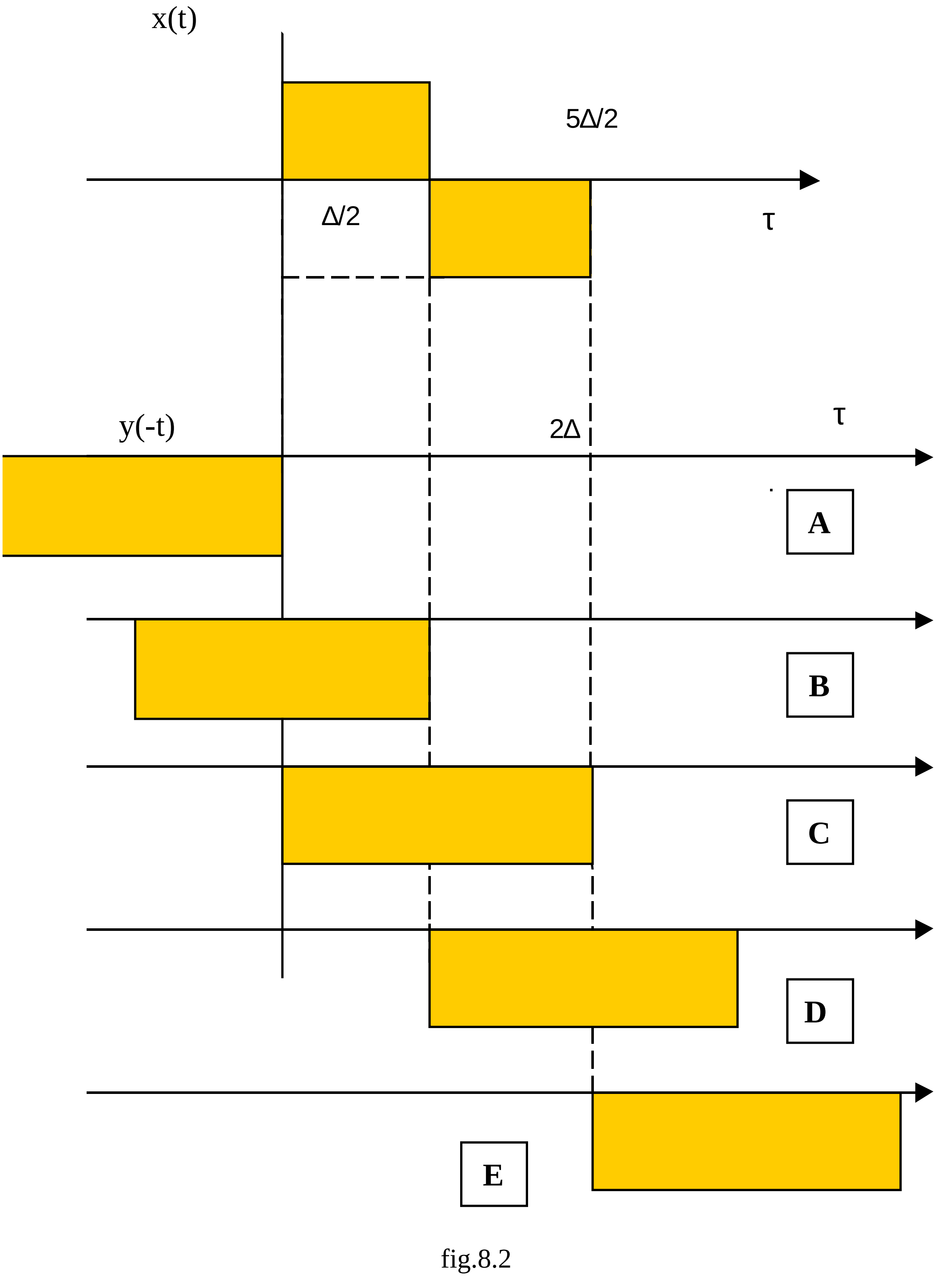


fig.8.2

Quanto indicato nella figura può essere riassunto in una matrice la cui prima riga rappresenta il segnale x(t) che non trasla rappresentato nella terza e quarta colonna. La seconda riga rappresenta il segnale y (-t), la terza y(Δ – t) e successivamente ancora y(2Δ – t), y(3Δ – t), y(4Δ – t). Nella figura e nella tabella non sono indicate le ampiezze, di cui bisognerà tener conto moltiplicando per ABΔ il risultato finale (si ricorda che Δ è il massimo della tra due impulsi rettangolari della stessa durata Δ e ampiezza unitaria).

Per ogni posizione del segnale che trasla, cioè per ogni riga, si procede a moltiplicare tra loro la prima riga e quella in esame, sommando poi i risultati ottenuti. Si ha allora il risultato riportato nell'ultima colonna.

0	**0**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**RIS**
-1	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**-1**
0	**0**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**0**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	**0**

Nella fig.8.3 è riportato il risultato rappresentato dall'ultima colonna della matrice; nella fig. 8.4 il risultato della convoluzione nella posizione e con le ampiezze corrette.

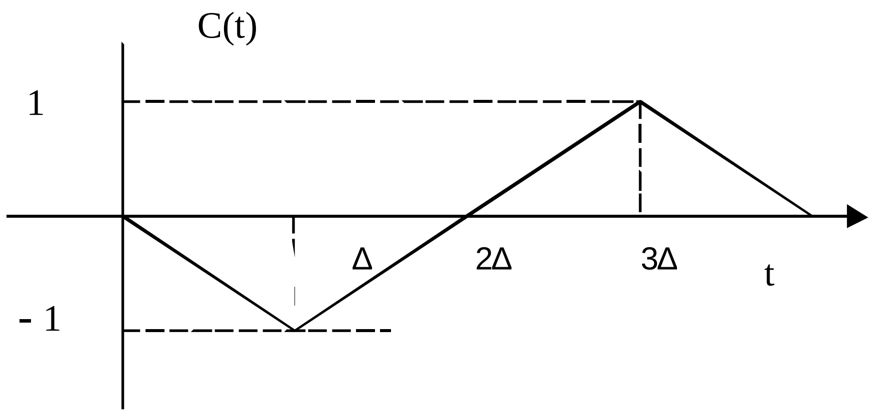


fig. 8.3

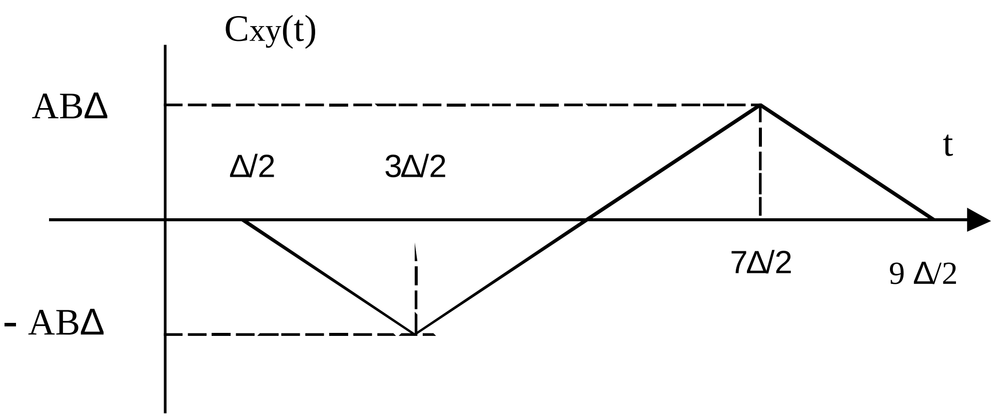


fig. 8.4

Si può osservare come la durata della convoluzione sia pari alla somma delle durate dei due impulsi.

Lo stesso procedimento si può applicare ai segnali dell'esercizio n.4; la matrice che rappresenta la convoluzione è, avendo trascurato la traslazione 2Δ del segnale y(t), che si suppone di non traslare:

0	1	-1	0	RIS
1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	-1
0	0	0	1	0

che ci consente di ottenere facilmente il risultato di fig.4.2

Esercizio n.9

Calcolare la convoluzione tra i due segnali :

$$x(t) = \mathrm{rect}_\Delta(t - \Delta/2) - \mathrm{rect}_\Delta(t - 3\Delta/2) + \mathrm{rect}_\Delta(t - 5\Delta/2$$

e

$$y(t) = \mathrm{rect}_\Delta(t - \Delta/2) - \mathrm{rect}_\Delta(t - 3\Delta/2) + \mathrm{rect}_\Delta(t - 5\Delta/2$$

Procedendo come indicato nel precedente esercizio si può costruire la matrice che caratterizza il problema:

0	0	0	1	-1	1	0	0	0	RIS
1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	-1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	-1	1	0	0	0	0	-2
0	0	0	1	-1	1	0	0	0	3
0	0	0	0	1	-1	1	0	0	-2
0	0	0	0	0	1	-1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	-1	1	0

Nella fig. 9.1 è riportato l'andamento della convoluzione richiesta.

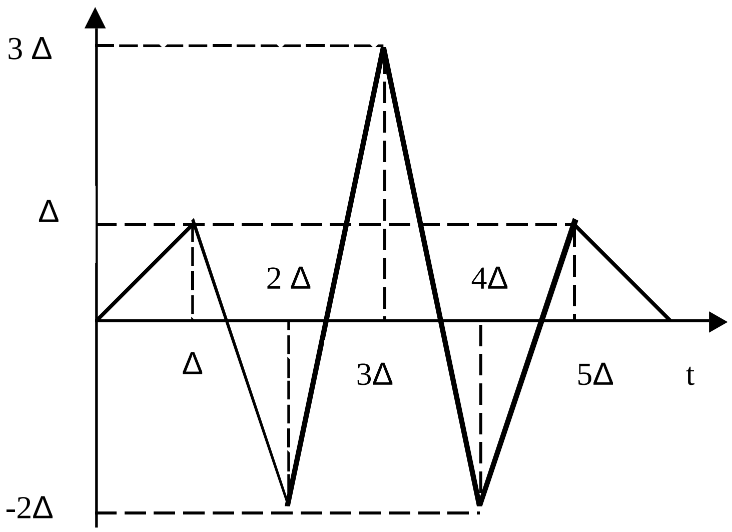


fig. 9.1

Esercizio n.10

Calcolare la convoluzione tra i due segnali:

$$x(t) = e^{j2\pi ft} \quad \text{e} \quad y(t) = \alpha\, e^{-\alpha t} u_{-1}(t)$$

con α reale e positivo.

La convoluzione cercata è:

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}\ \alpha\ e^{-\alpha\tau} u_{-1}(\tau)d\tau =$$

$$= \alpha\ e^{2j\pi ft} \int_{0}^{\infty} e^{-(j2\pi f+\alpha)\tau}\ d\tau$$

E' facile a questo punto arrivare all'espressione della convoluzione:

$$C_{xy}(t) = e^{2j\pi ft} \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f}$$

Come si può osservare la convoluzione, che è l'operazione con cui si calcola l'uscita da un sistema lineare e permanente, è ancora la sinusoide complessa di ingresso che ha modificato l'ampiezza e la fase. Nella figg.10.1 e 10.2 sono riportati gli andamenti dell'ampiezza e della variazione di fase (espressa in radianti) della sinusoide d'ingresso al variare della frequenza f (α = 4).

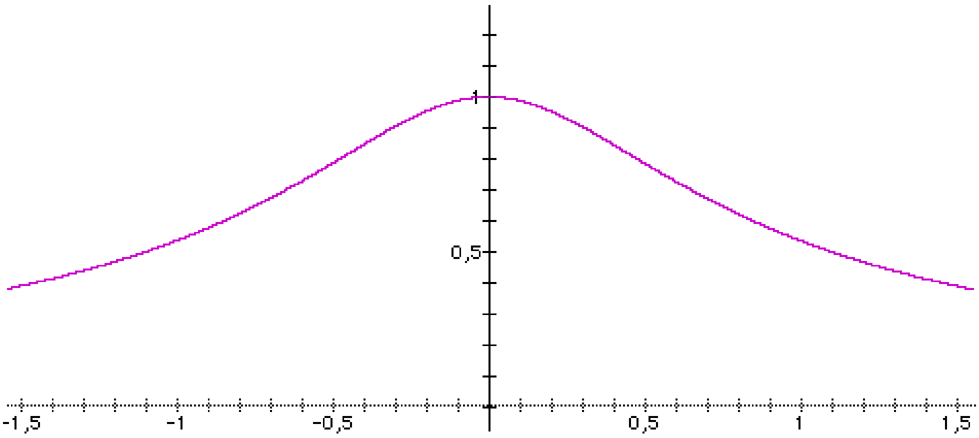


fig.10.1

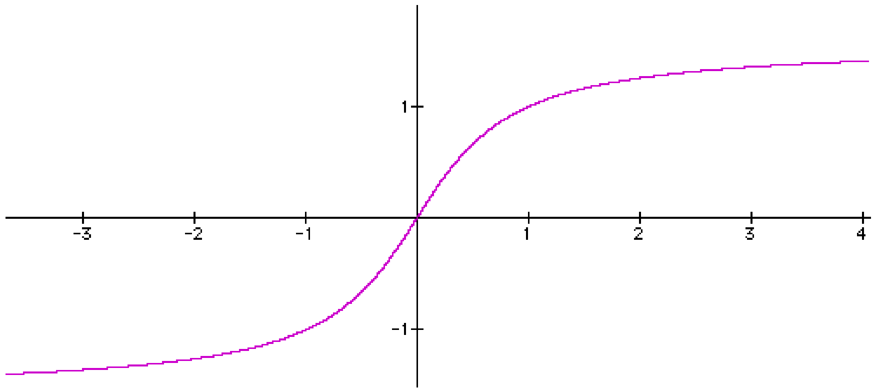


fig.10.2

Questo è vero in generale perché la convoluzione tra la sinusoide complessa e un generico segnale h(t) è:

$$C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)}\ h(\tau)\ d\tau\ =$$

$$= e^{2j\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau}\, h(\tau)\, d\tau$$

Si può riconoscere nell’ultimo integrale la trasformata di Fourier di h(t), che in generale indichiamo con H(f) che, col suo modulo, modifica l’ampiezza della sinusoide complessa e con la fase ne determina una rotazione di fase.

$$C_{xy}(t) = |H(f)| e^{2j\pi ft + Arg(H(f))}$$

Esercizio n.11

Calcolare la convoluzione tra i due segnali:

$$x(t) = A\ tri_{\Delta}(t) \quad \text{e} \qquad y(t) = \delta(t) - \delta(t-\Delta)$$

Tenendo conto delle proprietà di linearità dell’operazione convoluzione si può scrivere:

$$C_{xy}(t) = (\delta(t) - \delta(t-\Delta)) \quad A\ tri_{\Delta}(t) =$$
$$= \delta(t) \quad A\ tri_{\Delta}(t) - \delta(t-\Delta) \quad A\ tri_{\Delta}(t)$$

Ricordando che la convoluzione tra un segnale e un impulso di dirac centrato nel punto T trascina il segnale nella stessa posizione, si può scrivere:

$$C_{xy}(t) = A\ tri_{\Delta}(t) - A\ tri_{\Delta}(t-\Delta)$$

che è riportato nella figura 11.1.

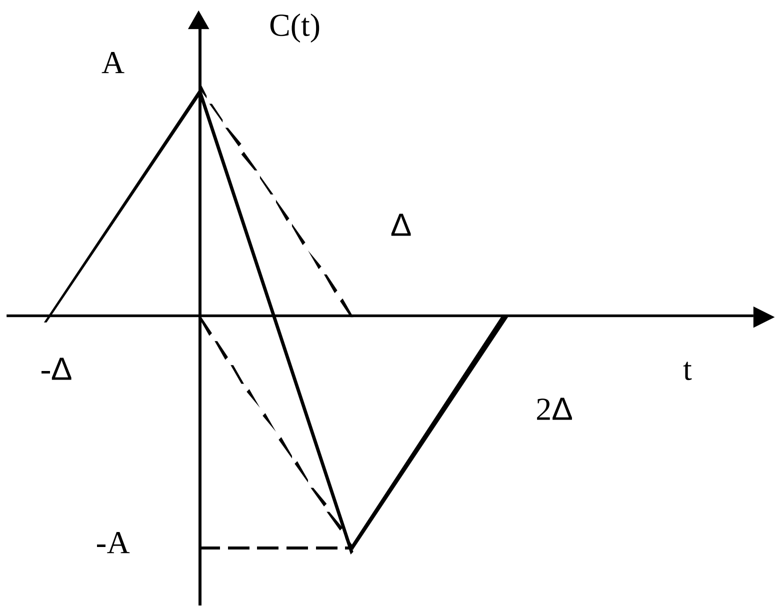
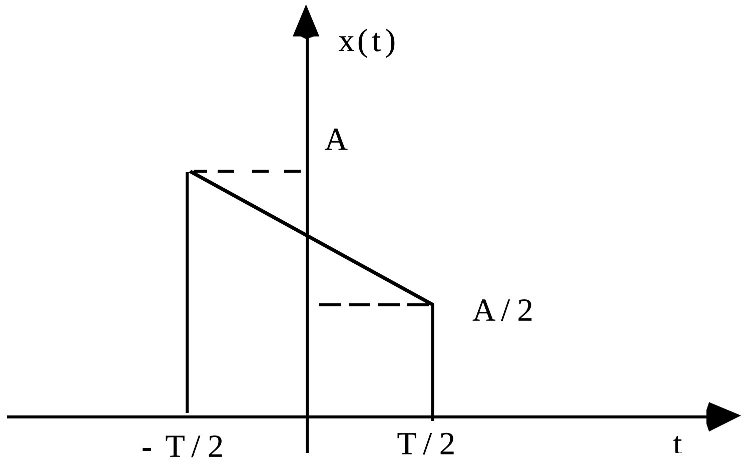
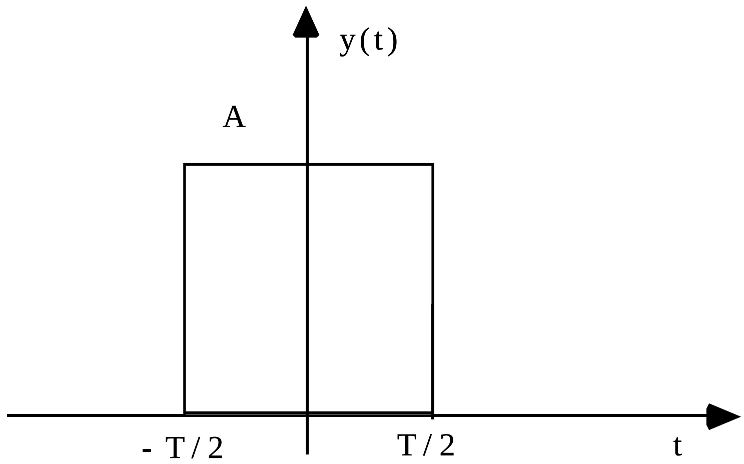


fig. 11.1

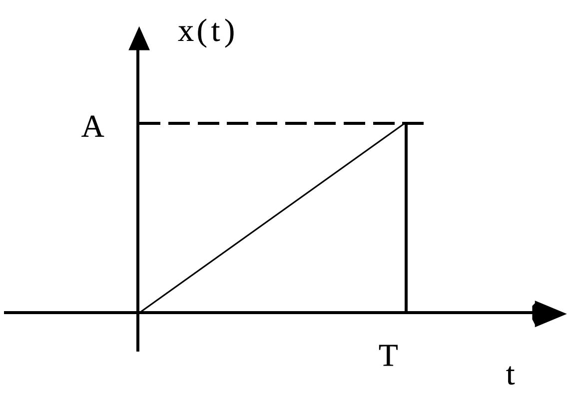
Esercizi proposti

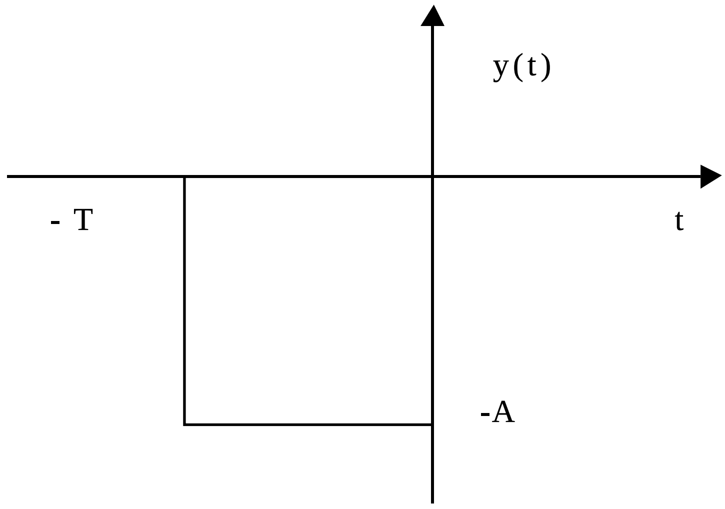
- Calcolare la convoluzione tra i segnali x(t) e y(t) riportati nelle figure





- Calcolare la convoluzione tra i segnali x(t) e y(t) riportati nelle figure




y(t)
- T
t
-A