Capitolo 4

Cenni sui sistemi lineari

4.1. Sistemi e trasformazioni

Il segnale elettrico trasferito dalla sorgente all'utente viene elaborato, e conseguentemente modificato, da più dispositivi attraverso i quali esso transita.

Si può schematizzare questo processo mediante una successione di trasformazioni T_i (vedi fig. 4.1), operanti sul segnale $x(t)$, che forniscono come risultato un segnale $y(t)$.

Una prima classificazione delle trasformazioni a cui viene assoggettato un segnale $x(t)$ nel suo trasferimento all'utente prevede due classi:

a) Trasformazioni che modificano il segnale aggiungendogli un segnale spurio, generalmente contraddistinto con il nome di *rumore*.

b) Trasformazioni che modificano il segnale senza l'aggiunta di segnali spuri.

Ci occuperemo nel seguito della sola classe *b*); di questa possiamo anzi aggiungere una classificazione più fine.

Indichiamo con $\mathscr{T}[x(t)]$ il segnale all'uscita di un sistema che lo sottopone ad una trasformazione $\mathscr{T}$ (vedi fig. 4.2), e classifichiamo le trasformazioni, e quindi i sistemi che le operano, come segue:

*b*1) Il sistema si dice *lineare* se vale il "principio della sovrapposizione degli effetti"; cioè, dati due segnali $x_1(t)$, $x_2(t)$ e due costanti

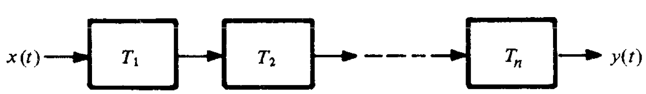

Figura 4.1 Successione di trasformazioni

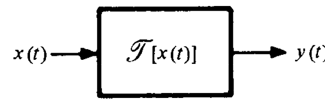

Figura 4.2 Trasformazione del segnale $x(t)$ mediante un sistema

a_1, a_2:

$$\mathscr{T}[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 \mathscr{T}[x_1(t)] + a_2 \mathscr{T}[x_2(t)]. \qquad [4.1]$$

Esempio 1. A questa classe appartengono i circuiti *RLC*, le linee, le guide d'onda...

Viceversa, diremo che un sistema è *non lineare* se per esso non vale il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè la [4.1].

Esempio 2. Il sistema che opera la trasformazione $\mathscr{S}[x(t)] = x^2(t)$ non è lineare. Infatti, prendendo $a_1 = a_2 = 1$ nella [4.1]:

$$\mathscr{S}[x_1(t) + x_2(t)] = [x_1(t) + x_2(t)]^2 \neq x_1^2(t) + x_2^2(t).$$

*b*2) Il sistema si dice *invariante* se, ritardando (o anticipando) il segnale al suo ingresso, anche il segnale all'uscita viene ritardato (o anticipato) della stessa quantità. In formule:

$$\begin{aligned} &\textit{se} \quad \mathscr{T}[x(t)] = y(t) \\ &\textit{allora}\ \mathscr{T}[x(t-\vartheta)] = y(t-\vartheta). \end{aligned} \qquad [4.2]$$

Esempio 3. Gli esempi 1 e 2 si riferiscono a sistemi invarianti.

*b*3) Il sistema si dice *senza memoria* se la sua uscita ad un dato istante di tempo dipende solo dal valore del segnale di ingresso nello stesso istante.

Si dirà *con memoria* nel caso opposto.

Esempio 4. La trasformazione descritta dall'equazione

$$y(t) = x^2(t)$$

è operata da un sistema senza memoria; viceversa, la trasformazione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

descrive un sistema con memoria: infatti il valore di $y(t)$ dipende da tutti i valori assunti da $x(\tau)$ per τ compreso tra $-\infty$ e t.

In questo capitolo ci limiteremo a considerare i sistemi *lineari e invarianti*, e vedremo come la teoria della trasformata di Fourier ci fornisca uno strumento molto utile per il loro studio.

Cominciamo con lo scrivere una formula generale che esprima la relazione ingresso-uscita di un sistema lineare. In generale, possiamo pensare che il segnale $y(t)$ all'uscita di un sistema lineare dipenda, ad ogni istante, dai tutti i valori assunti dal segnale di ingresso $x(t)$.

Esprimiamo questa dipendenza usando una funzione peso $h(\cdot, \cdot)$ in questo modo:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad [4.3]$$

Come si vede, per un fissato istante t di tempo $h(t, \tau)$ è una funzione di τ che "pesa" i valori corrispondenti di $x(\tau)$ e dà come risultato un valore che dipende da tutta la storia del segnale $x(\tau)$. Al variare dell'istante t varia quindi la funzione peso.

La [4.3], come si verifica facilmente, esprime una trasformazione lineare; è anzi la forma più generale di trasformazione lineare. Come si modifica per sistemi lineari invarianti? In questo caso la funzione peso diventa

$$h(t, \tau)=h(t-\tau)$$

da cui

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad [4.4]$$

Si vede infatti che, se all'ingresso del sistema viene inviato il segnale $x(t-\vartheta)$, all'uscita si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau-\vartheta)\mathrm{d}\tau= \qquad \text{ponendo } \lambda=\tau-\vartheta$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\vartheta-\lambda)x(\lambda)\mathrm{d}\lambda=y(t-\vartheta)$$

come esige la definizione $b2$) di sistema lineare invariante.

Un sistema lineare invariante è quindi completamente descritto dalla funzione $h(t)$, detta *risposta all'impulso* perché è il segnale che si ottiene all'uscita quando l'ingresso è un impulso ideale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=h(t).$$

Si noti ancora, prima di concludere questo paragrafo, che la [4.4] si può anche porre nella forma:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

4.2. Sistemi lineari e trasformata di Fourier

Consideriamo lo spettro $Y(\omega)$ del segnale $y(t)$ all'uscita di un sistema lineare invariante. Ricordando la [4.4] e la proprietà b) del paragrafo 3.3, avremo

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \qquad [4.5]$$

dove $H(\omega)$ è la trasformata di Fourier della risposta all'impulso $h(t)$. Questa funzione esprime il rapporto tra gli spettri dell'uscita e dell'ingresso:

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \qquad [4.6]$$

ed è detta *funzione di trasferimento* del sistema.

Della funzione di trasferimento si può dare una nuova interpretazione pensando ad un ingresso costituito da un segnale sinusoidale. Consideriamo allora il segnale $x(t)=Ae^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi)}$; avremo

$$X(\omega)=A\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi)}e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi Ae^{\mathrm{j}\varphi}\delta(\omega-\omega_0)$$

e quindi

$$Y(\omega)=H(\omega)\cdot 2\pi Ae^{\mathrm{j}\varphi}\delta(\omega-\omega_0)=H(\omega_0)\cdot 2\pi Ae^{\mathrm{j}\varphi}\delta(\omega-\omega_0).$$

Il segnale $y(t)$ si ottiene antitrasformando quest'ultima; facendo i conti si ottiene:

$$y(t)=H(\omega_0)\cdot Ae^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi)}=|H(\omega_0)|\cdot Ae^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi+\arg H(\omega_0))}. \qquad [4.7]$$

Dalla [4.7] si vede che all'uscita del sistema otterremo ancora un segnale sinusoidale, ma con ampiezza moltiplicata per $|H(\omega_0)|$ e sfasato di $\arg H(\omega_0)$.

Perciò, se pensiamo al segnale $x(t)$ decomposto, secondo la

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

in sinusoidi infinitesime di ampiezza complessa $\frac{1}{2\pi}X(\omega)\mathrm{d}\omega$, vediamo che all'uscita di un sistema lineare invariante con funzione di trasferimento $H(\omega)$ avremo sinusoidi con ampiezza complessa

$$\frac{1}{2\pi}H(\omega)X(\omega)\mathrm{d}\omega$$