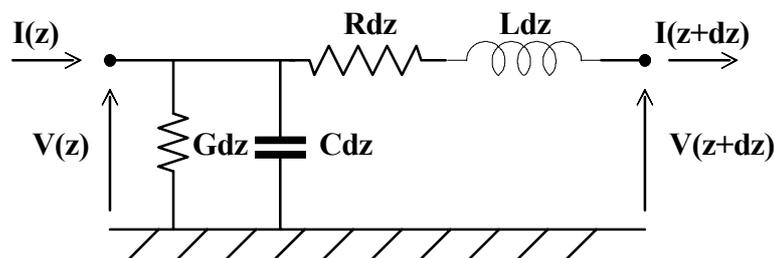


Linee di trasmissione ordinarie

(un conduttore più massa)

Modello circuitale

□ Si assumerà come postulato il **circuito equivalente** di un tronco di linea infinitesimo



$V(z)$ e $I(z)$ numeri complessi rappresentativi di tensione e corrente alla ascissa z

$$v(z, t) = \text{Re}[V(z)e^{j\omega t}]$$

□ Parametri primari della linea

L , induttanza per unità di lunghezza

C , capacità per unità di lunghezza

G , conduttanza per unità di lunghezza *(perdite nel dielettrico)*

R , resistenza per unità di lunghezza *(perdite nei conduttori)*

Si possono definire

$Z = R + j\omega L$ impedenza per unità di lunghezza

$Y = G + j\omega C$ ammettenza per unità di lunghezza

Nota: Y non va confusa con $1/Z$!!

□ Equazioni dei telefonisti

Dalle espressioni della corrente alla ascissa $z + dz$

$$I(z + dz) = I(z) + \frac{dI}{dz} dz + \dots$$

$$I(z + dz) = I(z) - YdzV(z)$$

e analogamente per la tensione

$$V(z + dz) = V(z) + \frac{dV}{dz} dz + \dots$$

$$V(z + dz) = V(z) - Zdz \left(I(z) + \frac{dI}{dz} dz + \dots \right)$$

trascurando i termini di ordine superiore in dz , si ottengono le equazioni dei telefonisti:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dz} = -YV(z) \\ \frac{dV}{dz} = -ZI(z) \end{cases}$$

Sostituiscono le eq. di Maxwell !

□ Soluzione

$$V(z) = V_+ e^{-\gamma z} + V_- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} (V_+ e^{-\gamma z} - V_- e^{\gamma z})$$

V_+ , V_- costanti arbitrarie

$$\text{con } \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY}, \quad Z_c = \sqrt{Z/Y}$$



costante di propagazione

impedenza caratteristica

□ Parametri secondari della linea

α , costante di attenuazione

β , costante di fase

Z_c , impedenza caratteristica

□ Onde progressive e regressive (incidenti e riflesse)

(osservazione nel dominio dei tempi)

$$\boxed{v_+(z, t) = \operatorname{Re}\left[V_+ e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right] = |V_+| \cos(\omega t - \beta z + \angle V_+)} \quad (\text{se } \alpha = 0)$$

- **periodicità**

nello spazio

lunghezza d'onda

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

nel tempo

periodo

$$T = 2\pi/\omega$$

- **velocità di fase**

$$v_f = \omega/\beta$$

per un tronco di linea di lunghezza ℓ

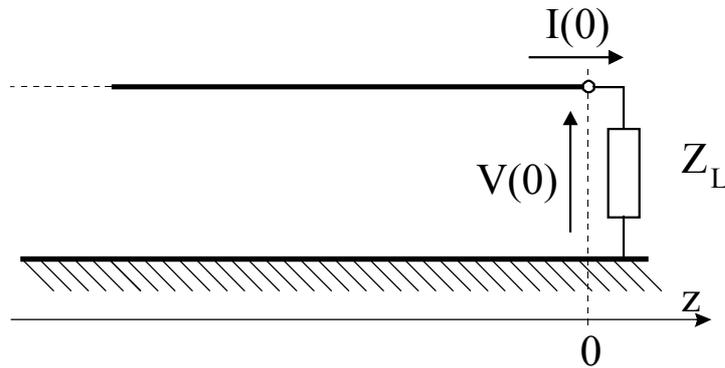
- **tempo di transito o ritardo di fase**

$$\tau = \ell/v_f$$

- **lunghezza elettrica**

$$\beta\ell = \omega\tau$$

Onde incidenti e riflesse lungo un tronco di linea caricata



□ **Intensità d' onda** incidente $a(z)$ e riflessa $b(z)$ [rispetto a Z_c]

Definizione:

$$a(z) = \frac{V_+}{\sqrt{Z_c}} e^{-\gamma z} \qquad b(z) = \frac{V_-}{\sqrt{Z_c}} e^{\gamma z}$$

□ Definizione di **coefficiente di riflessione**

$$\rho(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

□ Eliminazione di una costante arbitraria mediante vincolo alla sezione di **carico** $z = 0$

$$\begin{cases} \rho_L = \frac{V_-}{V_+} \\ V(0) = Z_L I(0) \quad (\text{se } \exists Z_L) \end{cases}$$

□ Legami tra Z_L e ρ_L

$$\boxed{Z_L = Z_c \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} \qquad \rho_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}}$$

□ Relazione tra grandezze alla sezione z e al carico

$$\begin{cases} a(z) = a_L e^{-\gamma z} \\ b(z) = b_L e^{\gamma z} \end{cases}$$

$$\rho(z) = \rho_L e^{2\gamma z}$$

$$Z_i(z) \triangleq \frac{V(z)}{I(z)} = Z_C \frac{Z_L \cosh \gamma z - Z_C \sinh \gamma z}{Z_C \cosh \gamma z - Z_L \sinh \gamma z}$$

□ Osservazione

$$\text{carico passivo} \quad \rightarrow \quad |\rho(z)| \leq 1$$

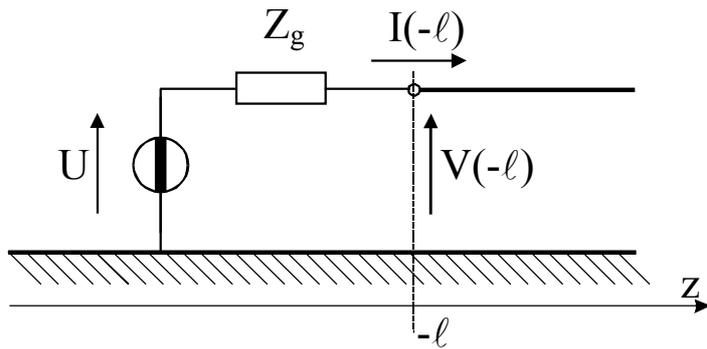
$$|\rho(z)| > 1 \quad \rightarrow \quad \text{carico attivo}$$

□ Regime di **onda puramente progressiva**

$$\text{def.:} \quad V_- = 0 \quad (b(z) = 0) \Rightarrow \rho(z) \equiv 0, \quad Z_i(z) \equiv Z_C$$

Ciò avviene se la linea è chiusa su un carico di impedenza $Z_L = Z_C$

□ Condizioni di eccitazione



$$V(-l) + Z_g I(-l) = U$$

$$V(-l) = Z_i(-l) I(-l)$$

$$V(-l) = V_+ (e^{\gamma \ell} + \rho_L e^{-\gamma \ell})$$

Occorre sviluppare con

$$I(-l) = \frac{V_+}{Z_C} (e^{\gamma \ell} - \rho_L e^{-\gamma \ell})$$

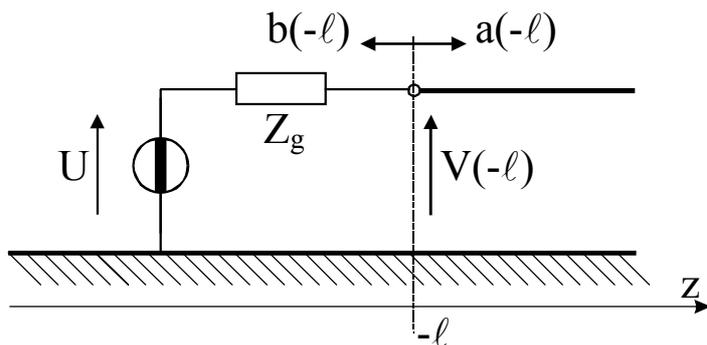
ove la costante V_- è già eliminata mediante imposizione delle condizioni di carico. Si ottiene:

$$U = V_+ (e^{\gamma \ell} + \rho_L e^{-\gamma \ell}) + V_+ \frac{Z_g}{Z_C} (e^{\gamma \ell} - \rho_L e^{-\gamma \ell}), \text{ da cui } V_+$$

$$\frac{U}{\sqrt{Z_C}} = (a(-l) + b(-l)) + \frac{Z_g}{Z_C} (a(-l) - b(-l))$$

$$U \sqrt{Z_C} = a(-l)(Z_C + Z_g) + b(-l)(Z_C - Z_g)$$

Possiamo esprimere le condizioni di vincolo in termini di onda incidente e riflessa sul generatore stesso.



$$a_g = b(-l)$$

$$b_g = a(-l)$$

$$b_g = \frac{Z_g - Z_C}{Z_g + Z_C} a_g + \frac{U \sqrt{Z_C}}{Z_g + Z_C} = \rho_g a_g + d_g$$

cioè l'onda uscente dal generatore (nel verso crescente della ascissa z) verso il carico è costituita dalla sovrapposizione di due termini: una onda riflessa vera e propria, con ρ_g coefficiente di riflessione dovuto alla impedenza Z_g , e un termine costante d_g , "impresso" dal generatore.

Linee a basse perdite e linee senza perdite

□ Una linea di trasmissione si dice a **basse perdite** se, a tutte le frequenze di impiego, i parametri dissipativi sono piccoli rispetto alle reattanze, cioè:

$$\frac{R}{\omega L} \ll 1$$

$$\frac{G}{\omega C} \ll 1$$

→ Le espressioni di α e β possono essere sostituite da sviluppi binomiali troncati:

$$\alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{LC}$$

NOTE:

- α NON dipende da ω se non attraverso i parametri primari
- β non dipende dalle perdite (in prima approssimazione si trascura un termine $\Delta\beta$. Si deve però ricordare ΔL , variazione dell' induttanza per unità di lunghezza, dovuta al campo all' interno dei conduttori, se questi non sono perfetti).

Anche per Z_C :

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \dots \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + j \left(\frac{G}{2\omega C} - \frac{R}{2\omega L} \right) \right)$$

Il termine in quadratura tende a zero al crescere di ω , quindi può essere trascurato alle alte frequenze.

$$Z_C \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

□ Linee prive di perdite

$$R = G = 0$$

Ipotesi accettabile, in prima approssimazione, quando si tratta di *applicazioni circuitali*, ove i tratti di linea di trasmissione sono assai brevi.

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} \in \Re$$

- L' ampiezza delle onde incidenti e riflesse è costante

$$\begin{cases} a(z) = a_L e^{-j\beta z} & |a(z)| = |a_L| \quad \forall z \\ b(z) = b_L e^{j\beta z} & |b(z)| = |b_L| \quad \forall z \end{cases}$$

- Coefficiente di riflessione

$$\rho(z) = \rho_L e^{j2\beta z} \quad |\rho(z)| = |\rho_L| \quad \forall z$$

- Impedenza della linea alla sezione z

$$Z_i(z) = Z_C \frac{Z_L \cos\beta z - jZ_C \sin\beta z}{Z_C \cos\beta z - jZ_L \sin\beta z}$$

- Note su ρ nel piano complesso:

1- Per un carico passivo $|\rho_L| \leq 1$, $|\rho_L| = 1$ per carico puramente reattivo.
 Infatti (con $Z_C = R_C$)

$$|\rho_L| = \left| \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \right| = \sqrt{\frac{(R_L - R_C)^2 + X_L^2}{(R_L + R_C)^2 + X_L^2}} = \sqrt{\frac{R_L^2 + R_C^2 + X_L^2 - 2R_L R_C}{R_L^2 + R_C^2 + X_L^2 + 2R_L R_C}}$$

2- Al variare di z , $\rho(z)$ descrive una circonferenza centrata nell' origine (una spirale logaritmica nel caso con perdite).

Rotazione **antioraria** procedendo **verso il carico**

Rotazione **oraria** procedendo **verso il generatore**

3- Uno spezzone di linea senza perdite terminata su un carico reattivo si presenta come una pura reattanza $\forall z$.

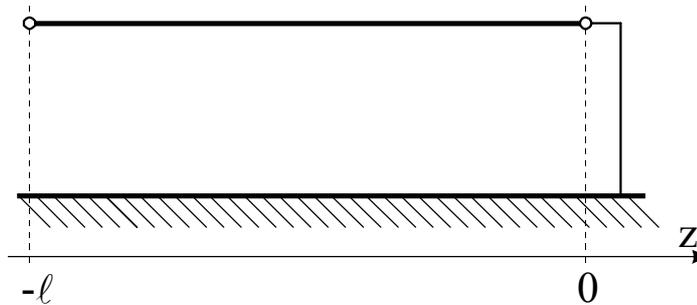
4- Il coefficiente di riflessione $\rho(z)$ è periodico con periodo $\lambda/2$ (conseguentemente anche $Z_i(z)$).

□ Tronchi di linea aperti e cortocircuitati

$$\text{da } Z_i(z) = Z_C \frac{Z_L \cos \beta z - j Z_C \sin \beta z}{Z_C \cos \beta z - j Z_L \sin \beta z}$$

si ottiene, se il carico è un cortocircuito ($Z_L = 0$), per un tratto di linea lungo ℓ ,

$$Z_i(-\ell) = j Z_C \tan \beta \ell$$



Quindi, per $\beta \ell < \pi/2$, cioè $\ell < \lambda/4$, la linea si comporta come una reattanza positiva (ha cioè un comportamento **induttivo**, anche se non si comporta esattamente come una induttanza).

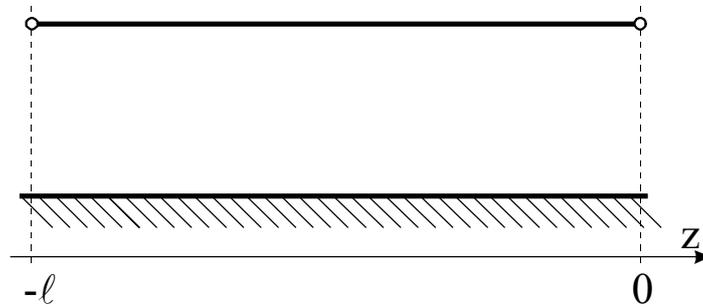
Se, però, $\ell \ll \lambda$ si può porre $\tan \beta \ell \cong \beta \ell$ e quindi

$$Z_i(-\ell) \cong j Z_C \beta \ell = j \sqrt{\frac{L}{C}} \omega \sqrt{LC} \ell = j \omega L \ell = j \omega L_s$$

(ricordando che L è l' induttanza della linea per unità di lunghezza).

*In pratica, ciò equivale a reintrodurre una ipotesi di **quasi-stazionarietà**, da cui segue la definizione di un componente di tipo concentrato.*

Analogamente per un circuito aperto ($|Z_L| \longrightarrow +\infty$) utilizzando l'ammettenza



$$Y_i(z) = Y_C \frac{Y_L \cos \beta z - j Y_C \sin \beta z}{Y_C \cos \beta z - j Y_L \sin \beta z}$$

da cui

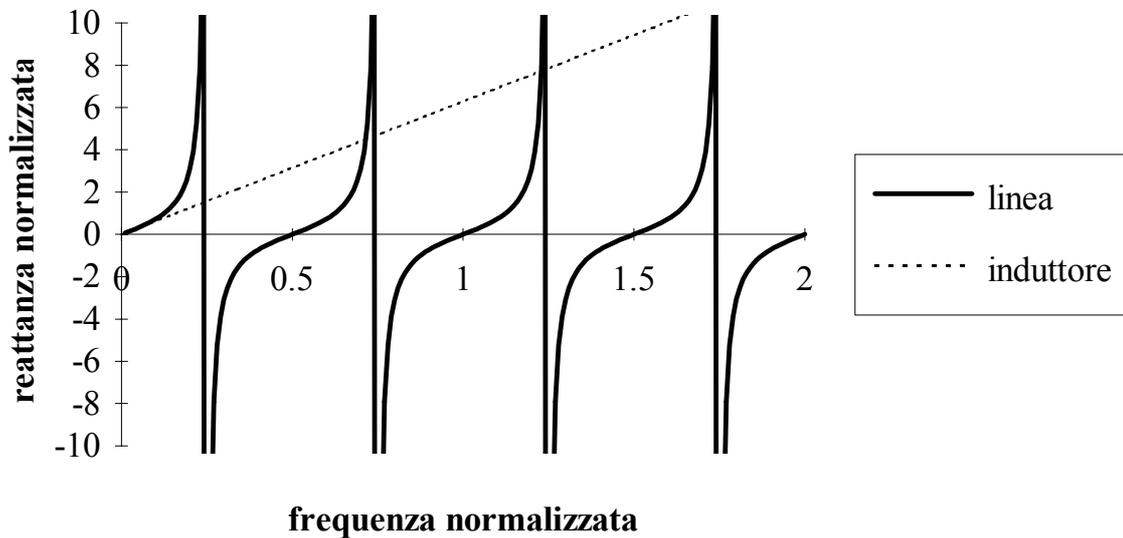
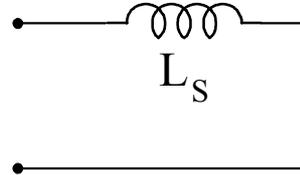
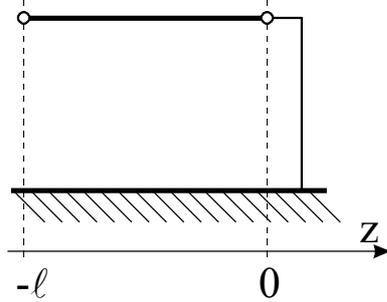
$$Y_i(-l) = j Y_C \tan \beta l$$

Per $l \ll \lambda$,

$$Y_i(-l) \cong j Y_C \beta l = j \sqrt{\frac{C}{L}} \omega \sqrt{LC} l = j \omega C l = j \omega C_P$$

cioè, anche in questo caso, la linea si comporta come un componente concentrato, in particolare una capacità.

□ Confronto linea/componente concentrato



reattanza normalizzata $x = X / Z_C$

frequenza normalizzata $\bar{f} = f/f_\ell$ ove $f_\ell = v_f/\ell$, cioè la
frequenza a cui vale $\lambda = \ell$

La linea si comporta come una induttanza concentrata solo per valori di frequenza abbastanza piccoli da rendere verificata l'ipotesi $\ell \ll \lambda$, poi manifesta un comportamento periodico (cambia di segno, quindi alterna comportamento induttivo e capacitivo).

Onde stazionarie

Dalle espressioni di tensioni e correnti sulla linea

$$V(z) = V_+ (e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z})$$

$$I(z) = \frac{V_+}{Z_c} (e^{-j\beta z} - \rho_L e^{j\beta z}) \quad \text{si ottiene:}$$

a) per $\rho_L = 0$ (**onda puramente progressiva**) $|V(z)| = |V_+| = \text{cost}$, quindi

$v(z, t) = \text{Re}\{V(z)e^{j\omega t}\}$ varia sinusoidalmente con la stessa ampiezza in ogni sezione.

L'involuppo dell'onda (cioè il luogo dei massimi e dei minimi al variare di z) è individuato da $\pm|V(z)|$, cioè da due rette parallele all'asse z .

b) **in generale:**

$$V(z) = V_+ (e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z})$$

↑ ↑
incidente riflessa

si può anche esprimere come segue:

$$\begin{aligned}
V(z) &= V_+ \left(e^{-j\beta z} + |\rho_L| e^{j\phi_L} e^{j\beta z} \right) = && \left[\text{ove } \rho_L = |\rho_L| e^{j\phi_L} \right] \\
&= V_+ e^{j\phi_L/2} \left(e^{-j(\beta z + \phi_L/2)} + |\rho_L| e^{j(\beta z + \phi_L/2)} \right) = \\
&= V_+ e^{j\phi_L/2} \left[\left(1 - |\rho_L| \right) e^{-j(\beta z + \phi_L/2)} + |\rho_L| \left(e^{-j(\beta z + \phi_L/2)} + e^{j(\beta z + \phi_L/2)} \right) \right] = \\
&= V_+ e^{j\phi_L/2} \left[\left(1 - |\rho_L| \right) e^{-j(\beta z + \phi_L/2)} + 2|\rho_L| \cos(\beta z + \phi_L/2) \right] = V_P(z) + V_S(z)
\end{aligned}$$

↑
↑
progressiva
stazionaria

□ Interpretazione

Il primo termine è ancora un' onda di tipo **progressivo**, con ampiezza ridotta del fattore $1 - |\rho_L|$ rispetto alla consueta formulazione in termini di onda incidente e riflessa.

Il secondo dà luogo ad un contributo

$$\begin{aligned}
v_s(z, t) &= \text{Re}\{V_s(z)e^{j\omega t}\} = |V_+| 2|\rho_L| \cos(\beta z + \phi_L/2) \cos(\omega t + \angle V_+ + \phi_L/2) = \\
&= f_1(z) f_2(t)
\end{aligned}$$

In ogni sezione si ha un' oscillazione con ampiezza $|V_s(z)|$, diversa da punto a punto. E' una componente **stazionaria**. Ha un andamento periodico (sinusoidale) sia nello spazio che nel tempo.

□ Involuppo della tensione

$$\begin{aligned} |V(z)|^2 &= V(z)V^*(z) = |V_+|^2 \left[(1 - |\rho_L|)^2 + 4|\rho_L|^2 \cos^2(\beta z + \phi_L/2) + \right. \\ &+ 2|\rho_L| \cos(\beta z + \phi_L/2) 2(1 - |\rho_L|) \cos(\beta z + \phi_L/2) \left. \right] = \\ &= |V_+|^2 \left[(1 - |\rho_L|)^2 + 4|\rho_L| \cos^2(\beta z + \phi_L/2) \right] \end{aligned}$$

quindi

$$|V(z)| = |V_+| \sqrt{(1 - |\rho_L|)^2 + 4|\rho_L| \cos^2(\beta z + \phi_L/2)}$$

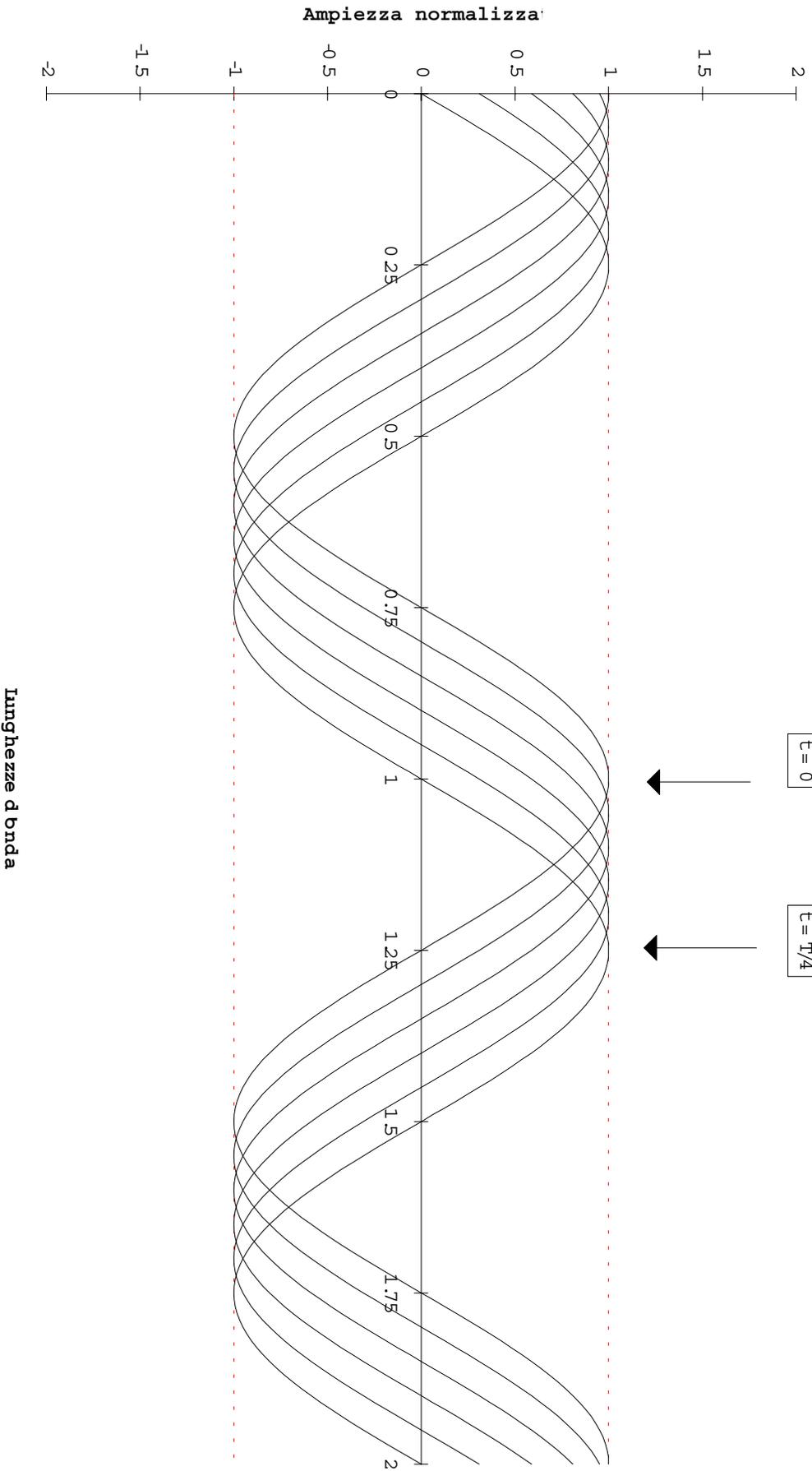
- ① per $|\rho_L| = 0$ si ritrova $|V(z)| = |V_+|$
(onda puramente PROGRESSIVA)
- ② per $|\rho_L| = 1$ (carico reattivo) $|V(z)| = 2|V_+| \cos(\beta z + \phi_L/2)$
involuppo sinusoidale (onda puramente STAZIONARIA)
- ③ per $0 < |\rho_L| < 1$ involuppo periodico ma NON sinusoidale
(onda parzialmente STAZIONARIA)

La scomposizione in $V(z) = V_P(z) + V_S(z)$ permette di evitare la conclusione (erronea) che l'onda si arresti bruscamente al raggiungimento della condizione $|\rho_L| = 1$. E' un'onda che viaggia deformandosi, ma con velocità sempre pari a $v_f \forall |\rho_L| < 1$. In realtà accade semplicemente che la componente "viaggiante" si estingue, cioè la sua ampiezza tende a zero, lasciando solo quella stazionaria.

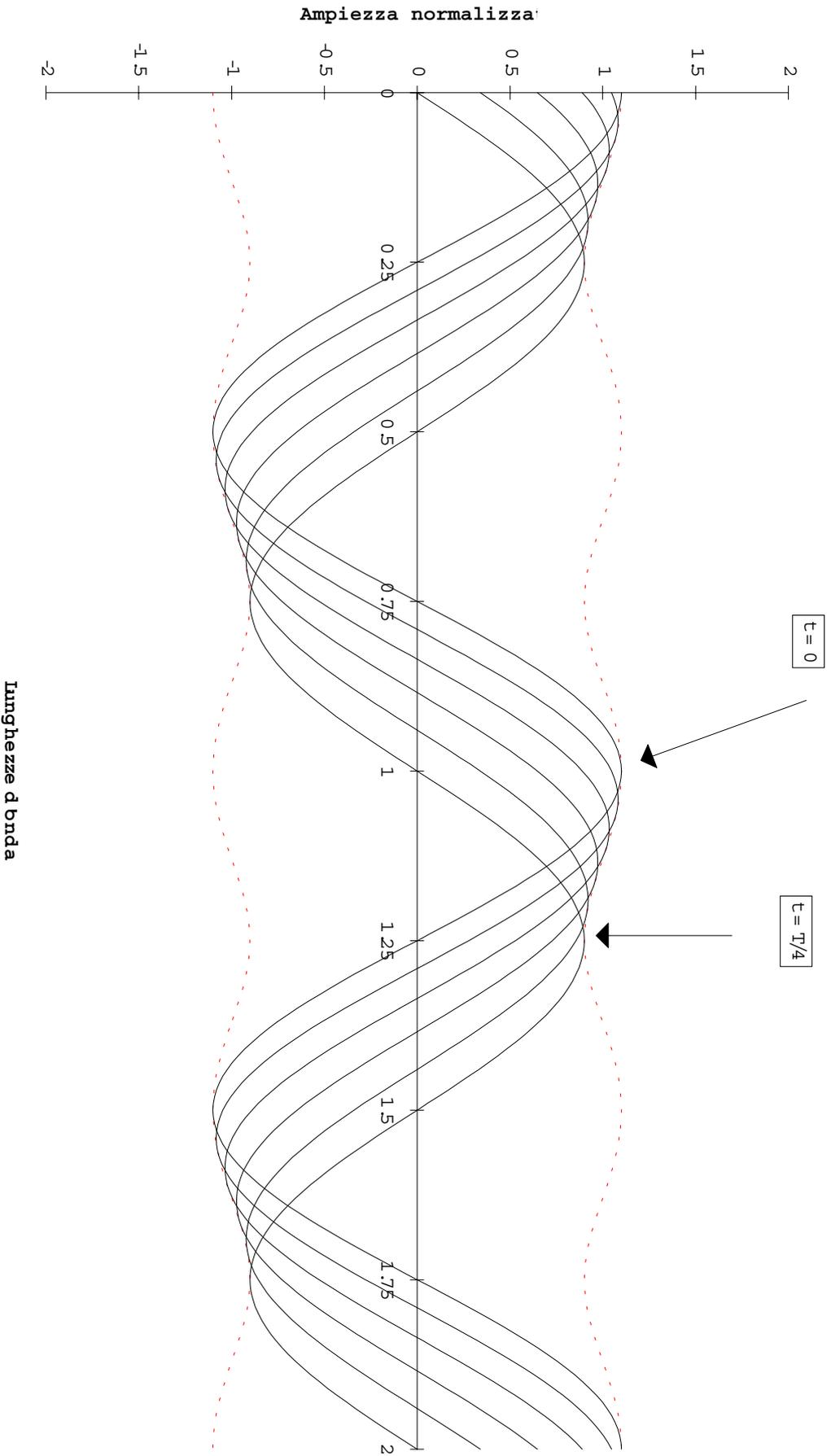
Modulo del coefficiente di riflessione = 0

$t = 0$

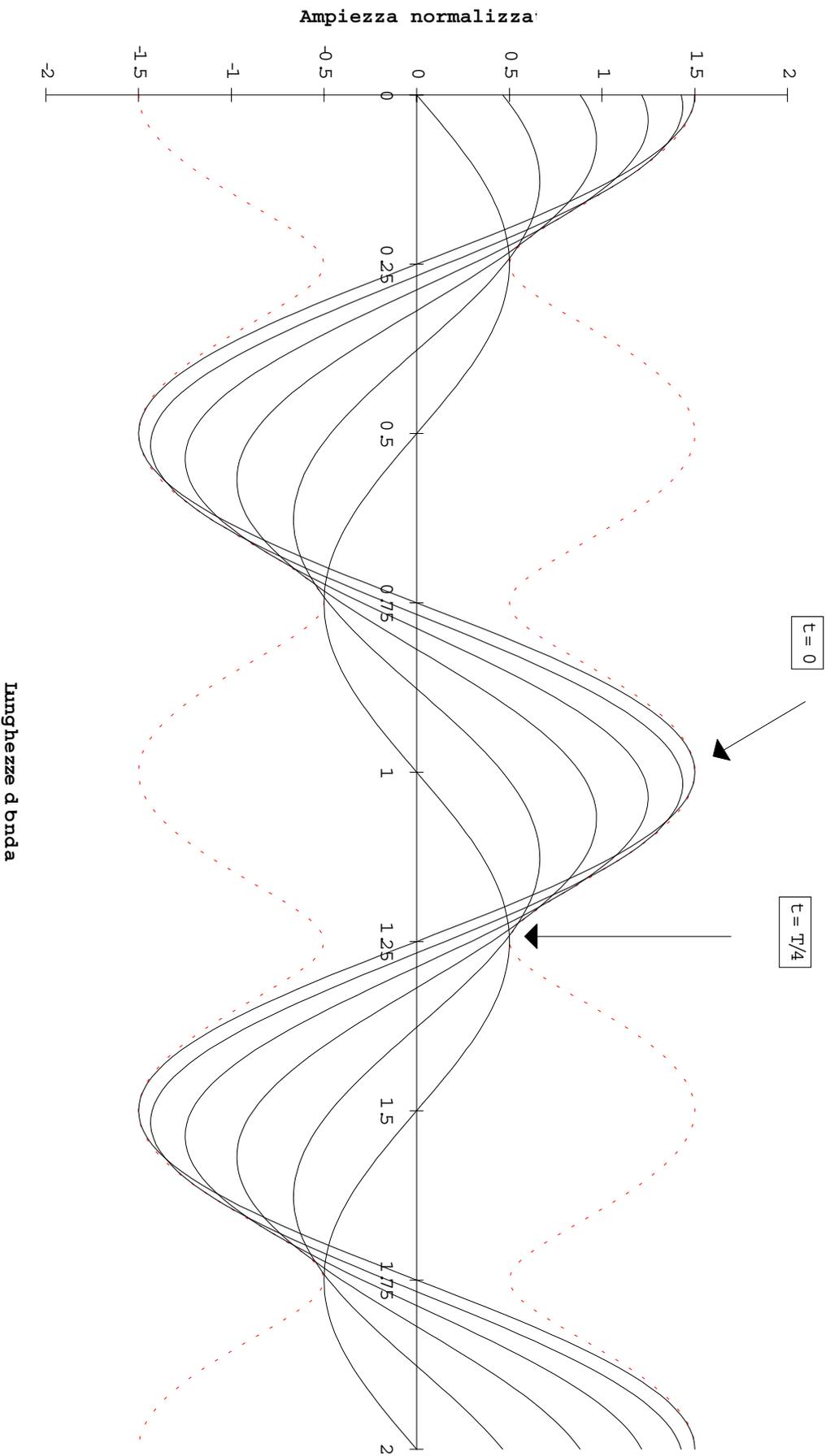
$t = \pi/4$



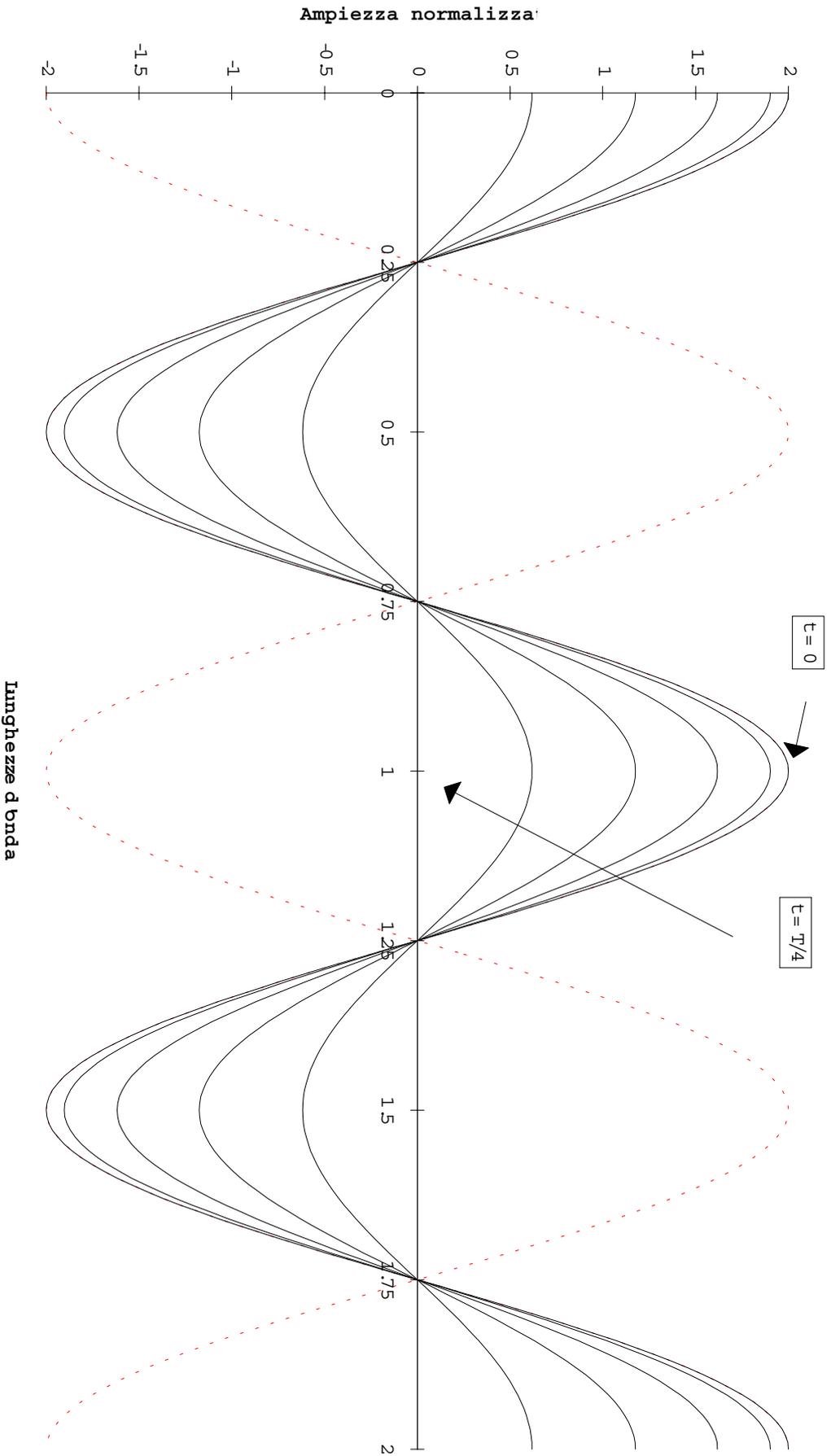
Modulo del coefficiente di riflessione = 0.1



Modulo del coefficiente di riflessione = 0.5

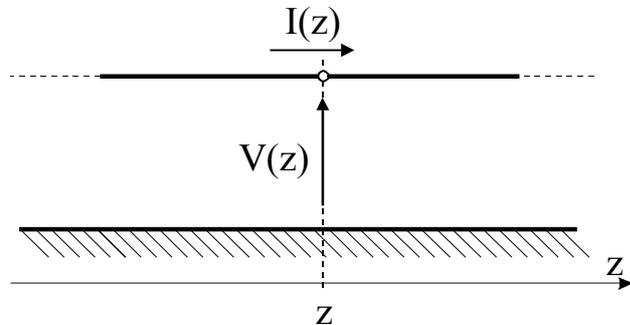


Modulo del coefficiente di riflessione = 1



□ Potenza

La potenza **attiva** che attraversa la sezione della linea all' ascissa z è



$$P(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ V(z) I^*(z) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ V_+ (e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z}) \frac{V_+^*}{Z_C} (e^{j\beta z} - \rho_L^* e^{-j\beta z}) \right\} =$$

$$= \frac{|V_+|^2}{2Z_C} (1 - |\rho_L|^2) = \frac{1}{2} (|a_L|^2 - |b_L|^2)$$

E' indipendente da z (grazie alla assenza di perdite)

In generale è

$$P(z) = \frac{1}{2} (|a(z)|^2 - |b(z)|^2)$$

cioè la differenza tra la potenza *progressiva* o *incidente* e la potenza *regressiva* o *riflessa*

⇒ Relazione tra intensità d' onda e potenza

- ① per $|\rho_L| = 0$ si ha il valore massimo $\frac{|V_+|^2}{2Z_C} = \frac{1}{2} |a(z)|^2$
(si potrebbe verificare che la potenza reattiva è nulla)
- ② per $|\rho_L| = 1$ si ha $P(z) \equiv 0$, non c'è trasporto di potenza attiva
(coerentemente con il fatto che non c'è onda viaggiante ma solo un regime stazionario)

□ Sulla posizione di massimi e minimi

Dalla espressione $|V(z)| = |V_+| \sqrt{(1 - |\rho_L|)^2 + 4|\rho_L| \cos^2(\beta z + \phi_L/2)}$ è facile vedere che l'ampiezza della tensione è **massima** quando

$$\cos(\beta z + \phi_L/2) = \pm 1$$

cioè

$$\beta z + \phi_L/2 = k\pi \quad (\text{con } k = 0, -1, -2, \dots)$$

quindi

$$z = -\frac{\phi_L}{2\beta} + k \frac{\lambda}{2} \quad z \leq 0$$

- I punti di massimo sono distanziati di mezze lunghezze d'onda.

[Nota: nelle figure si è supposto $\phi_L = 0$, che equivale a un carico puramente resistivo $R_L \geq Z_C (\in \mathfrak{R})$, fino al caso limite di circuito aperto ($R_L \rightarrow +\infty$)]

Si ha, in tali sezioni, $|V|_{\max} = |V_+|(1 + |\rho_L|) = |V_+| + |V_-|$

Analogamente si trovano delle sezioni di **minimo** per

$$z = -\frac{\phi_L}{2\beta} + (2k + 1) \frac{\lambda}{4} \quad z \leq 0$$

ove $|V|_{\min} = |V_+|(1 - |\rho_L|) = |V_+| - |V_-|$

Per la **corrente** possono essere ottenute espressioni analoghe. Si osserva però che, nelle sezioni di massimo della tensione, la corrente

assume il valore minimo $|I|_{\min} = \frac{1}{Z_C} (|V_+| - |V_-|)$

mentre

$$|I|_{\max} = \frac{1}{Z_C} (|V_+| + |V_-|)$$

è il valore assunto nelle sezioni di minimo della tensione.

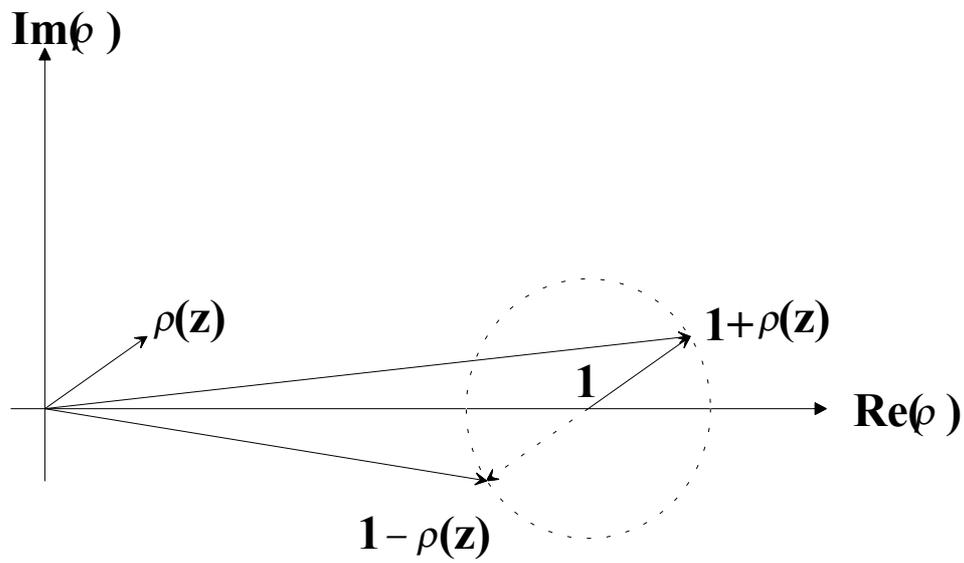
□ Rappresentazione grafica

$$\begin{cases} V(z) = V_+ e^{-j\beta z} + V_- e^{j\beta z} = V_+ (e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z}) = V_+ e^{-j\beta z} [1 + \rho(z)] \\ I(z) = \frac{1}{Z_C} (V_+ e^{-j\beta z} - V_- e^{j\beta z}) = \frac{V_+}{Z_C} (e^{-j\beta z} - \rho_L e^{j\beta z}) = \frac{V_+}{Z_C} e^{-j\beta z} [1 - \rho(z)] \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_+| |1 + \rho(z)| \\ Z_C |I(z)| = |V_+| |1 - \rho(z)| \end{cases}$$

Osservando i vettori rappresentativi di $1 + \rho(z)$ e $1 - \rho(z)$ sul piano complesso, si riconosce che essi ruotano su una circonferenza, centrata nel punto $(1,0)$ e di raggio $|\rho(z)|$. Si nota che i massimi di V corrispondono ai minimi di I e viceversa.



Coeff. di trasmissione $\triangleq 1 + \rho(z) = \frac{V(z)}{V_+ e^{-j\beta z}}$

□ Rapporto d' onda stazionaria (ROS)

E' anche detto VSWR (voltage standing wave ratio)

$$S = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} \quad \text{Può essere facilmente misurato}$$

$$S = \frac{|V_+| + |V_-|}{|V_+| - |V_-|} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} \quad \rightarrow \quad |\rho| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

(si ricordi che in assenza di perdite $|\rho| = |\rho_L|$)

Si noti che S dà meno informazione di ρ , ma spesso è sufficiente per gli scopi pratici.

Se si desidera, ad esempio, un regime di pura onda progressiva, la condizione $\rho = 0$ è equivalente a $|\rho| = 0$, cioè $S = 1$. In generale $1 \leq S \leq +\infty$ e $S \rightarrow +\infty$ per un regime di pura onda stazionaria.

□ Relazione con massimo e minimo della impedenza d' ingresso

L' impedenza nelle sezioni di massimo (di $V(z)$) è

$$Z_{i_{\max}} = \frac{V_{\max}}{I_{\min}} = \frac{|V_+| + |V_-|}{\frac{1}{Z_C} (|V_+| - |V_-|)} = S Z_C$$

nelle sezioni di minimo

$$Z_{i_{\min}} = \frac{V_{\min}}{I_{\max}} = \frac{Z_C}{S}$$

Nota: in entrambi i casi è una *pura resistenza*.

Verifica:

$$\begin{cases} V(z) = V_+ (e^{-j\beta z} + \rho_L e^{j\beta z}) \\ I(z) = \frac{V_+}{Z_C} (e^{-j\beta z} - \rho_L e^{j\beta z}) \end{cases} \quad \rho_L = |\rho_L| e^{j\phi_L}$$

Nelle sezioni di massimo $\beta z + \phi_L/2 = k\pi$, quindi la componente progressiva ha fase (trascurando l'argomento di V_+)

$$-\beta z = -k\pi + \phi_L/2 = \theta$$

quella regressiva (di V)

$$\beta z + \phi_L = k\pi + \phi_L/2$$

Sono in fase (differiscono per $\pm 2k\pi$), mentre nella corrente c' è uno sfasamento di π (dovuto al segno). Sono in opposizione.

$$\begin{cases} V(z)|_{\text{MAX}} = V_+ e^{j\theta} (1 + |\rho_L|) \\ I(z)|_{\text{MAX}} = \frac{V_+}{Z_C} e^{j\theta} (1 - |\rho_L|) \end{cases} \quad [\text{il rapporto è } SZ_C]$$

(Nota: con $|_{\text{MAX}}$ si intendono le sezioni di massimo per la tensione)

Carta di Smith

E' una costruzione grafica che permette di realizzare in maniera semplice le *trasformazioni* tra descrizioni in termini di impedenza (o ammettenza) e di coefficiente di riflessione.

Nonostante la sua origine sia nell' ambito della teoria delle linee di trasmissione, si vedrà come la si utilizzi, più in generale, anche in casi dove queste non compaiono.

Ha due tipi di impiego principali:

- 1) Soluzione di problemi di adattamento
- 2) Rappresentazione di caratteristiche di componenti, dispositivi, circuiti

★ Sarà importante fare attenzione alla diversa natura dei due tipi di applicazione dello strumento.

□ Legami tra coefficiente di riflessione e impedenza

$$\rho(z) = \frac{Z_i(z) - Z_C}{Z_i(z) + Z_C} \quad Z_i(z) = Z_C \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}$$

□ Trasformazioni lungo la linea (a partire dal carico)

$$\rho(z) = \rho_L e^{2j\beta z} \quad Z_i(z) = Z_C \frac{Z_L - jZ_C \tan \beta z}{Z_C - jZ_L \tan \beta z}$$

La rappresentazione della impedenza sul piano complesso richiede un semipiano infinito, infatti

$$R_i \in [0, +\infty[\quad X_i \in]-\infty, +\infty[$$

e la formula di trasformazione è più complicata.

Invece:

$$|\rho(z)| \leq 1 \quad (\text{nell' ipotesi di carico passivo})$$

e la trasformazione è più semplice.

□ Normalizzazione della impedenza

[Nel seguito non si confondano z (coordinata assiale) e \bar{z} (impedenza normalizzata)].

L' impedenza normalizzata

$$\bar{z} = \frac{Z_i(z)}{Z_C}$$

è esprimibile in funzione del coefficiente di riflessione con

$$\bar{z} = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$$

□ Ammettenza

$$\bar{y} = \frac{Y_i}{Y_C} = Z_C Y_i = \bar{z}^{-1}$$

$$\bar{y} = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1-\bar{y}}{1+\bar{y}}$$

Ponendo

$$\bar{z} = \bar{r} + j\bar{x}$$

$$\bar{y} = \bar{g} + j\bar{b}$$

$$\rho = u + jv$$

resistenza e reattanza normalizzate

conduttanza e suscettanza normalizzate

parte reale e immaginaria del coefficiente di riflessione

si può facilmente osservare che le **rette** a

$$\left. \begin{array}{l} \bar{r} = \cos t \\ \bar{x} = \cos t \end{array} \right\} \text{ sul piano } \bar{z}$$
$$\left. \begin{array}{l} \bar{g} = \cos t \\ \bar{b} = \cos t \end{array} \right\} \text{ sul piano } \bar{y}$$

diventano **circonferenze** sul piano della variabile complessa ρ

Ad esempio:

$$\bar{z} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad \Rightarrow \quad \bar{r} + j\bar{x} = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} = \frac{1 - u^2 - v^2 + 2jv}{(1 - u)^2 + v^2}$$

quindi

$$\bar{r} = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \qquad \bar{x} = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$

La retta $\bar{r} = 1$, ad esempio, viene trasformata, sul piano di ρ , nella curva

$$u^2 + v^2 - u = 0$$

che rappresenta una circonferenza con centro $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$.

□ Tabella riassuntiva

	centro	raggio
$\bar{r} = \text{cost}$	$\frac{\bar{r}}{\bar{r} + 1}$	$\frac{1}{ \bar{r} + 1 }$
$\bar{x} = \text{cost}$	$1 + j\frac{1}{\bar{x}}$	$\frac{1}{ \bar{x} }$
$\bar{g} = \text{cost}$	$-\frac{\bar{g}}{\bar{g} + 1}$	$\frac{1}{ \bar{g} + 1 }$
$\bar{b} = \text{cost}$	$-1 - j\frac{1}{\bar{b}}$	$\frac{1}{ \bar{b} }$

□ Circonferenze a $\bar{r} = \text{cost}$

- hanno centro sull' asse reale e sono tutte tangenti in $\rho = 1$ (circuito aperto)
- $\bar{r} = 0$ coincide con la circonferenza $|\rho| = 1$, è il luogo dei punti rappresentativi dei carichi reattivi.
- i carichi passivi sono rappresentati da punti interni alla circonferenza $|\rho| = 1$
- punti esterni a tale circonferenza rappresentano sicuramente carichi attivi (può non essere vero il contrario).
- $\bar{r} = 1$, cioè $\text{Re}\{Z_i\} = Z_C (\in \Re)$, passa per l' origine.
- per $\bar{r} \rightarrow +\infty \Rightarrow$ punto $\rho = 1$ (la circonferenza degenera nel punto di circuito aperto)
- la reattanza aumenta procedendo in senso orario sulla circonferenza.

□ Circonferenze a $\bar{x} = \text{cost}$

- hanno il centro sulla retta $u = 1$, sono tangenti all'asse reale nel punto di circuito aperto.
- $\bar{x} = 0$ degenera nell'asse u , è il luogo dei punti rappresentativi dei carichi puramente resistivi.
- $\rho = -1$ ($\bar{r} = \bar{x} = 0$) corto circuito
- $\rho = 0$ ($\bar{r} = 1, \bar{x} = 0$) $\Rightarrow Z_i = R_i = Z_C (\in \Re)$
- $\bar{x} = 1$ ha raggio unitario
- per $\bar{x} \rightarrow +\infty$ la circonferenza degenera nel punto di circuito aperto
- la resistenza aumenta procedendo verso il punto $\rho = 1$

□ Ammettenze

Si noti che le espressioni $\bar{z}(\rho)$ e $\bar{y}(\rho)$ differiscono per il segno del coefficiente di riflessione.

Quindi le curve a $\bar{g} = \text{cost}$ e $\bar{b} = \text{cost}$ sono **simmetriche**, rispetto all'origine, alle curve a $\bar{r} = \text{cost}$ e $\bar{x} = \text{cost}$, rispettivamente.



La carta di Smith per le impedenze può essere usata per le ammettenze ruotandola di 180° .

□ Trasformazione del coefficiente di riflessione

Lungo la linea il coefficiente di riflessione varia con $\rho(z) = \rho_L e^{2j\beta z}$, quindi verso il carico il punto rappresentativo si sposta su una circonferenza (centrata nell' origine e di raggio $|\rho_L|$) in senso antiorario (z crescente), il contrario verso il generatore.

Sono dette anche **curve a ROS costante**, in quanto $S = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$ non cambia lungo la linea (priva di perdite!)

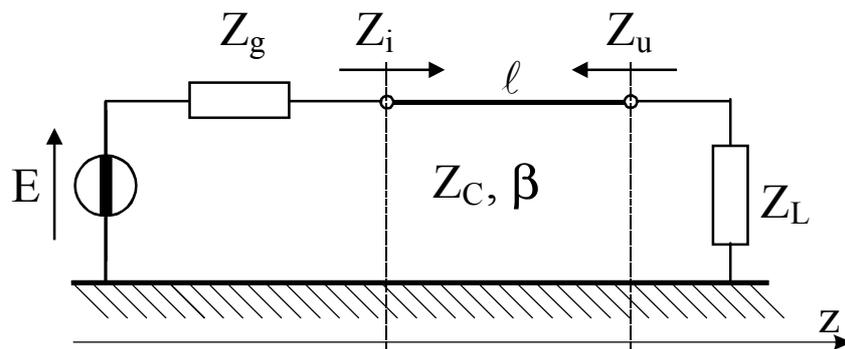
□ Periodicità della carta di Smith

Si osservi che, mentre l' andamento di $v(z,t)$ ha una periodicità (nello spazio, ad un istante prefissato) pari alla lunghezza d' onda λ , le caratteristiche elettriche di un tronco di linea caricata ad una estremità, cioè $Z_i(z)$ e $\rho(z)$, si ripetono con una periodicità di mezza lunghezza d' onda.

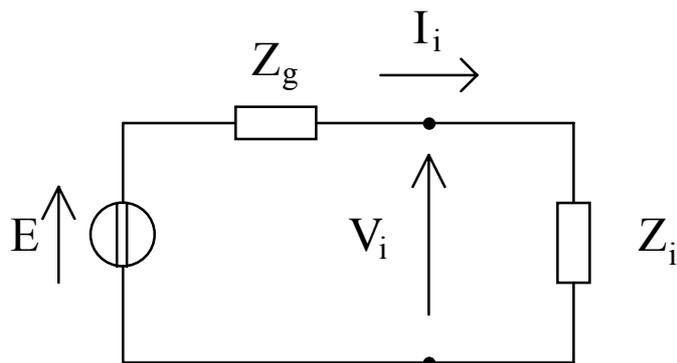
Il problema dell' adattamento

Generalità

Si consideri un **carico** di impedenza Z_L , alimentato da un **generatore** di impedenza interna Z_g , attraverso una **linea di trasmissione senza perdite**, di impedenza caratteristica Z_C , costante di fase β e lunghezza l .



Dal punto di vista del generatore si può utilizzare una **rappresentazione circuitale equivalente** alla precedente.



Z_i = impedenza alla sezione di imbocco della linea

La **potenza attiva** che il generatore fornisce alla linea è data da

$$P_i = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V_i I_i^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{Z_i I_i I_i^*\} = \frac{1}{2} R_i |I_i|^2 \quad \text{ove } R_i = \operatorname{Re}\{Z_i\}$$

quindi
$$P_i = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{|Z_g + Z_i|^2} R_i$$

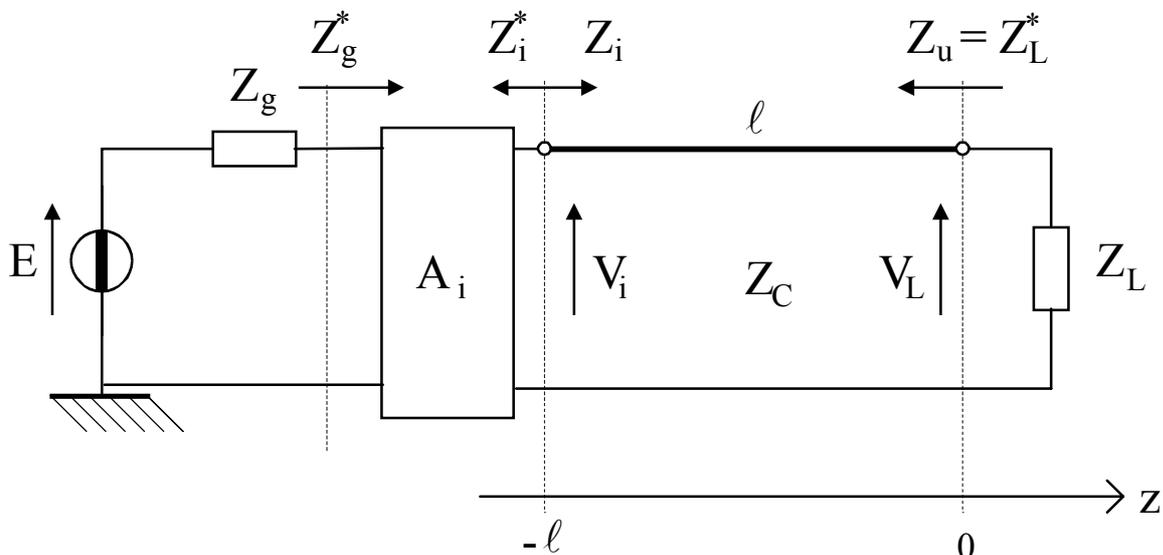
E' facile verificare che la potenza P_i è massima quando $Z_i = Z_g^*$

Tale condizione è detta di **adattamento in potenza** o adattamento coniugato.

La potenza fornita in tale condizione si dice **potenza disponibile** del generatore

$$P_{av} = \frac{|E|^2}{8 \operatorname{Re}\{Z_g\}}$$

L'adattamento può essere realizzato inserendo un quadripolo (reciproco) privo di perdite, detto **adattatore di impedenza senza perdite**.



Si può dimostrare che, se la condizione di adattamento in potenza è verificata alla sezione di uscita del generatore, lo è pure alla sezione di carico ($Z_u = Z_L^*$) e in una qualunque sezione della linea.

Viceversa, *non è*, in generale verificata la condizione di onda puramente progressiva sulla linea (*adattamento in uniformità*) che richiederebbe $Z_L = Z_C$

□ Svantaggi

1 - Distorsione

Se fosse verificato l' adattamento in uniformità sarebbe

$$V_L = V(0) = V_+$$

$$V_i = V(-\ell) = V_+ e^{j\beta\ell}$$

La funzione di trasferimento

$$H(j\omega) = \frac{V_L}{V_i} = e^{-j\beta\ell}$$

soddisfarebbe le *condizioni di non distorsione* perchè

$$|H(j\omega)| = 1 \quad \text{e} \quad \angle H(j\omega) \propto \omega$$

(poichè la costante di fase β è proporzionale a ω)

★ Ciò non è vero se $\rho_L \neq 0$

2 - Selettività

Poichè la linea non è adattata in uniformità $Z_i \neq Z_C$

★ Al variare della frequenza, quindi della lunghezza elettrica della linea, Z_i può cambiare notevolmente, e con essa la condizione di adattamento.

3 - Onda stazionaria

Nelle sezioni di massimo della tensione (V_M), l'impedenza (reale) è $Z_C S$, quindi la potenza attiva che transita lungo la linea è

$$P = \frac{|V_M|^2}{2Z_C S} \rightarrow |V_M| = \sqrt{2PZ_C S}$$

★ A parità di potenza trasportata la tensione massima cresce con \sqrt{S} , cioè con il disadattamento.



3a - Limitazioni di potenza

★ Dovute al pericolo di scariche per tensioni troppo elevate

3b - Perdite

★ Aumentano con il disadattamento.

Infatti per un tronco di linea lungo $\lambda/2$ la *potenza media dissipata* è

$$W_{Lm} = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda/2} \frac{1}{2} [R|I(z)|^2 + G|V(z)|^2] dz$$

Può essere calcolata utilizzando un metodo perturbativo al primo ordine. In altre parole, poichè le perdite sono piccole, si ritiene che il loro effetto sul regime elettrico complessivo sia, in prima approssimazione, trascurabile. Il calcolo viene perciò effettuato con il regime ($V(z)$, $I(z)$) ottenuto supponendo totale assenza di perdite.

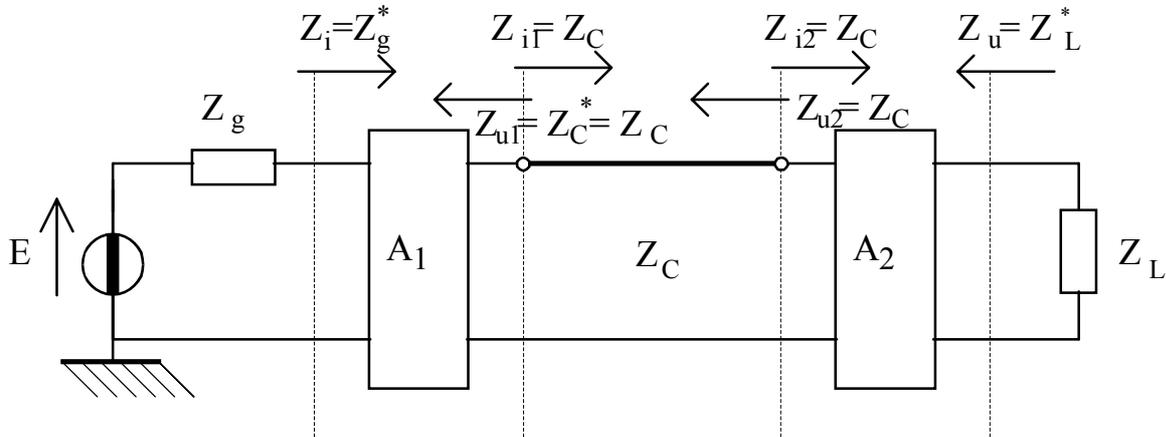
Sviluppando i calcoli si ottiene

$$W_{Lm} \cong P(RY_C + GZ_C) \frac{1 + |\rho_L|^2}{1 - |\rho_L|^2}$$

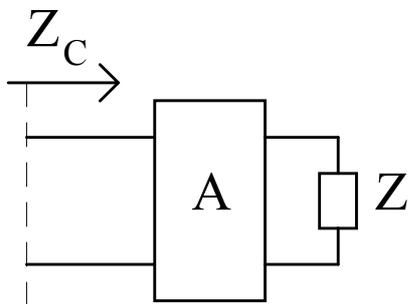
ove P è la potenza che (in assenza di perdite) transita lungo la linea.

★ Quindi la potenza dissipata cresce con il modulo del coefficiente di riflessione.

La situazione ottimale, quindi, si realizza con adattamento in potenza del generatore accompagnato da adattamento in uniformità della linea.



Nota: Entrambi gli adattatori possono essere ricondotti allo schema seguente



E' il caso di A_2 , con $Z = Z_L$, ma vale anche per A_1 , con Z_g al posto di Z_L , tenendo conto che, per l' assenza di perdite $Z_C = Z_C^*$

□ Adattamento con componenti reattivi (senza perdite)

Si possono utilizzare:

1. Tratti di linea di trasmissione aperti o cortocircuitati (stub), collegati da tratti in cascata.
2. Componenti concentrati

connessi

- in serie
- in parallelo

□ Adattamento a banda stretta

Adattamento ad una singola frequenza (f_0). Quando ci si discosta da f_0 il ROS diventa > 1 (a volte anche molto rapidamente).

La **banda dell' adattatore** è l' intervallo di frequenze in cui il ROS si mantiene entro un limite prefissato.

□ Adattamento a banda larga

- procedimenti analitici complessi
- progetto mediante l' uso del calcolatore

Adattatori a costanti distribuite

□ Topologia: criteri di scelta

Sono fortemente dipendenti dal tipo di tecnologia utilizzata

1. *Connessione*: molto spesso è più semplice realizzare le connessioni in parallelo. Ci si occuperà solo di queste.

2. *Terminazione*: la terminazione in corto circuito è spesso preferita (bifilari, coassiali) perchè evita fenomeni di irradiazione, non trascurabili per una linea aperta ad alta frequenza, e per questioni meccaniche (maggiore rigidità e robustezza). In altri casi (ad es. per la microstriscia) la realizzazione del corto circuito può comportare problemi (connessione a massa tramite via-hole) tali da far preferire, a volte, il circuito aperto.

3. *Lunghezza*: non può scendere sotto certi limiti imposti dalla tecnologia. D'altra parte, utilizzare linee troppo lunghe riduce la banda dell' adattatore (e potrebbe anche aumentare le perdite, nei casi in cui queste non siano trascurabili).

□ Proprietà degli stub (richiamo)

Assegnata l' impedenza caratteristica Z_C , la costante di fase β e la lunghezza ℓ si ha:

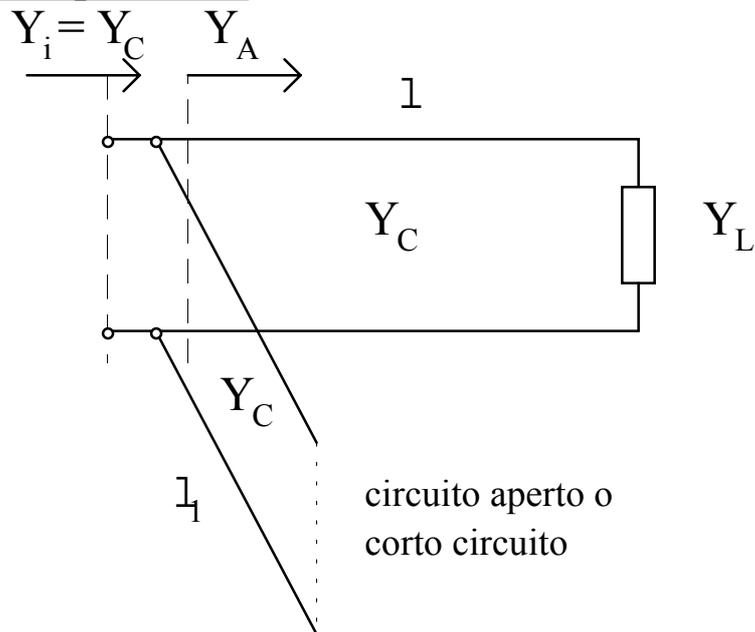
	impedenza	ammettenza
c.c.	$jZ_C \tan \beta \ell$	$-jY_C \cot \beta \ell$
c.a.	$-jZ_C \cot \beta \ell$	$jY_C \tan \beta \ell$

Hanno caratteristiche periodiche. Lo stesso comportamento (ad una frequenza prefissata) può essere ottenuto con tutte le linee di lunghezza

$$\ell' = \ell \pm k \frac{\lambda}{2}$$

la scelta di k deve rispettare il criterio 3 precedentemente enunciato.

Adattatore a semplice stub



Data la connessione in parallelo è preferibile utilizzare le *ammettenze*.

Y_C è l' ammettenza caratteristica sia della linea che dello stub (si suppone assegnata).

Y_A è l' ammettenza nella sezione immediatamente a valle di quella di imbocco dello stub.

Y_i è l' ammettenza nella sezione immediatamente a monte di quella di imbocco dello stub.

I **parametri** disponibili sono le due lunghezze l e l_1

(si vuole imporre un valore prefissato ad una quantità complessa, ad es. ρ , o, equivalentemente, Z_i o Y_i).

★ Se ne descriverà la sintesi (a banda stretta)

- per via analitica
- sulla carta di Smith
- con l' ausilio del calcolatore

1. Sintesi analitica

Se la suscettanza dello stub è $B_1 = b_1 Y_C$, per imporre la condizione di adattamento si dovrà ottenere

$$Y_i = Y_C = Y_A + jB_1$$

da cui, normalizzando,

$$y_A = 1 - jb_1$$

Il coefficiente di riflessione alla sezione di ingresso della linea (sez. A) è

$$\rho_A = \rho_L e^{-2j\beta\ell} \quad \text{con} \quad \rho_A = \frac{1 - y_A}{1 + y_A}$$

da cui

$$\boxed{\frac{jb_1}{2 - jb_1} = \rho_L e^{-2j\beta\ell}} \quad (1)$$

che costituisce la soluzione del problema.

Il valore della **suscettanza dello stub** si può ottenere eguagliando i moduli

$$\frac{b_1^2}{4 + b_1^2} = |\rho_L|^2 \quad \Rightarrow \quad |b_1| = \frac{2|\rho_L|}{\sqrt{1 - |\rho_L|^2}}$$

La **lunghezza dello stub** può essere poi ottenuta dalla espressione della ammettenza.

Per il caso di *corto circuito* si ricava

$$b_1 = -\cot \beta \ell_1 \Rightarrow \ell_1 = -\frac{1}{\beta} \operatorname{arc cot} b_1 + k \frac{\lambda}{2}$$

- Si scelga, ad es., $b_1 > 0$.

Eguagliando gli argomenti nella (1) si ottiene

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc tan} \frac{b_1}{2} = \angle \rho_L - 2\beta \ell + 2k\pi$$

da cui la **lunghezza della linea**

$$\ell = \frac{1}{2\beta} \left(\angle \rho_L - \operatorname{arc tan} \frac{b_1}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{1}{2\beta} \left(\angle \rho_L - \operatorname{arc tan} \frac{b_1}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + k \frac{\lambda}{2}$$

Lo stesso risultato potrà essere ottenuto mediante

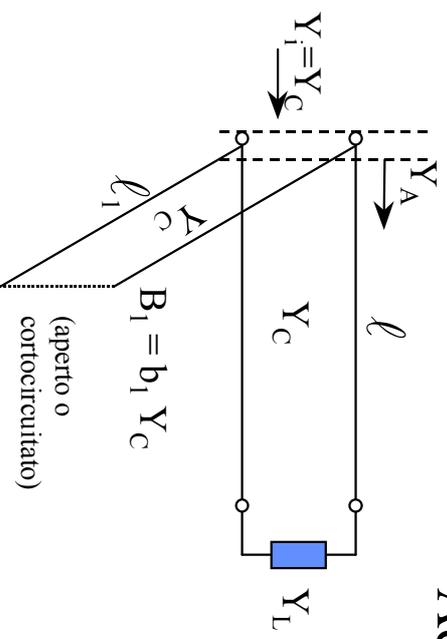
2. *Sintesi sulla carta di Smith*

o tramite

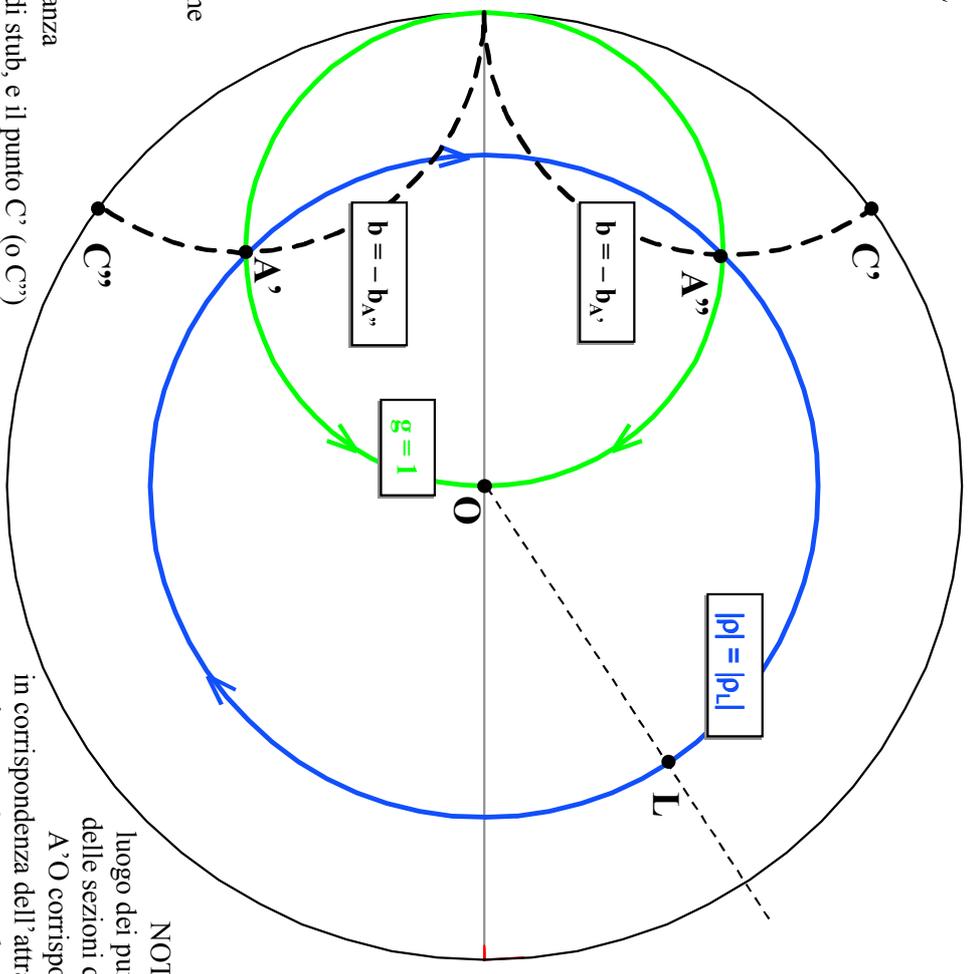
3. *Sintesi al calcolatore*

Adattatore a semplice stub

parametri di progetto
 ℓ, ℓ_1



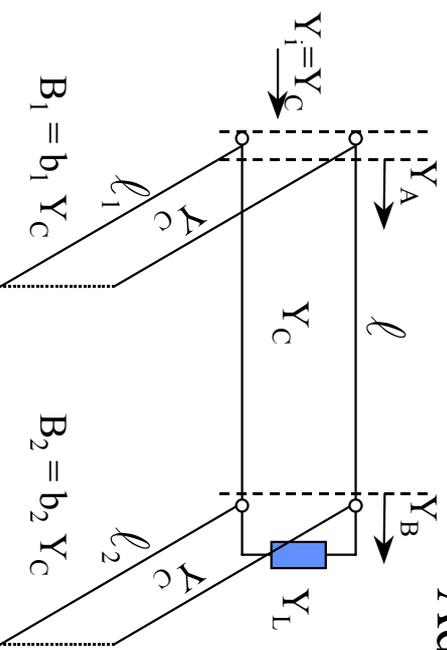
- 1 Individuazione del punto L (carico)
- 2 La circonferenza a $|\rho| = |\rho_L|$ ha due intersezioni (A' , A'') con la circ. a $g=1$ (cui appartiene O) La scelta determina la lunghezza della linea (tramite l'angolo $L \hat{O} A$)
- 3 La suscettanza dello stub deve annullare quella residua in tale punto
 - per il punto A' : $b_1 = -b_{A'}$
 - per il punto A'' : $b_1 = -b_{A''}$
- 4 Il punto rappresentativo dello stub è l'intersezione
 - C' tra le circ. $r = 0$ e $b = -b_{A'}$
 - C'' tra le circ. $r = 0$ e $b = -b_{A''}$
- 5 La lunghezza dello stub (ℓ_1) si ottiene dalla distanza angolare dal punto di c.a. o c.c., secondo il tipo di stub, e il punto C' (o C'') procedendo in senso *orario*



NOTA: l'arco LA' è il luogo dei punti rappresentativi delle sezioni della linea, mentre $A'O$ corrisponde ad uno scatto in corrispondenza dell'attraversamento della sezione ove è connesso lo stub.

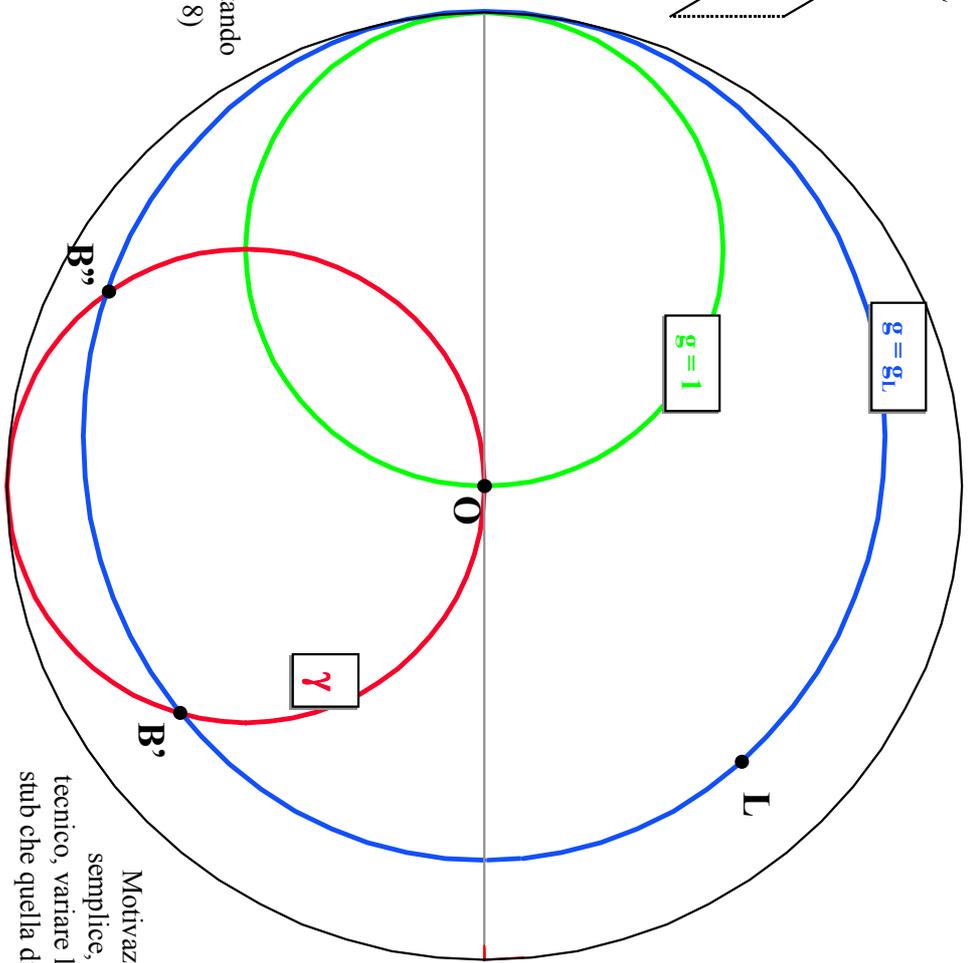
Adattatore a doppio stub (1)

parametri di progetto
 ℓ_1, ℓ_2



Sono necessarie 4 circonferenze:

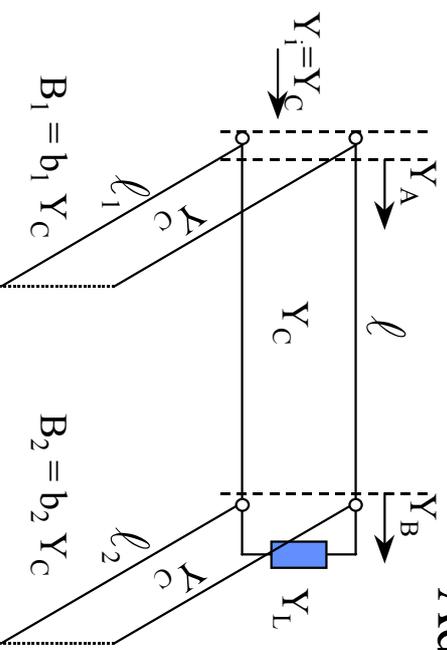
- 1 $g=1$, cui appartengono l'origine e il punto rappresentativo della sezione A (da individuare)
- 2 γ , cui apparterrà il punto B' (o B''), ottenuta ruotando la circ. $g = 1$ di un angolo $2\beta\ell$ (in figura $\ell = \lambda/8$)
- 3 $g = g_L$, cui appartiene il punto rappresentativo del carico (L)
- 4 una circonferenza a $p = \text{cost}$, individuabile nel secondo passo



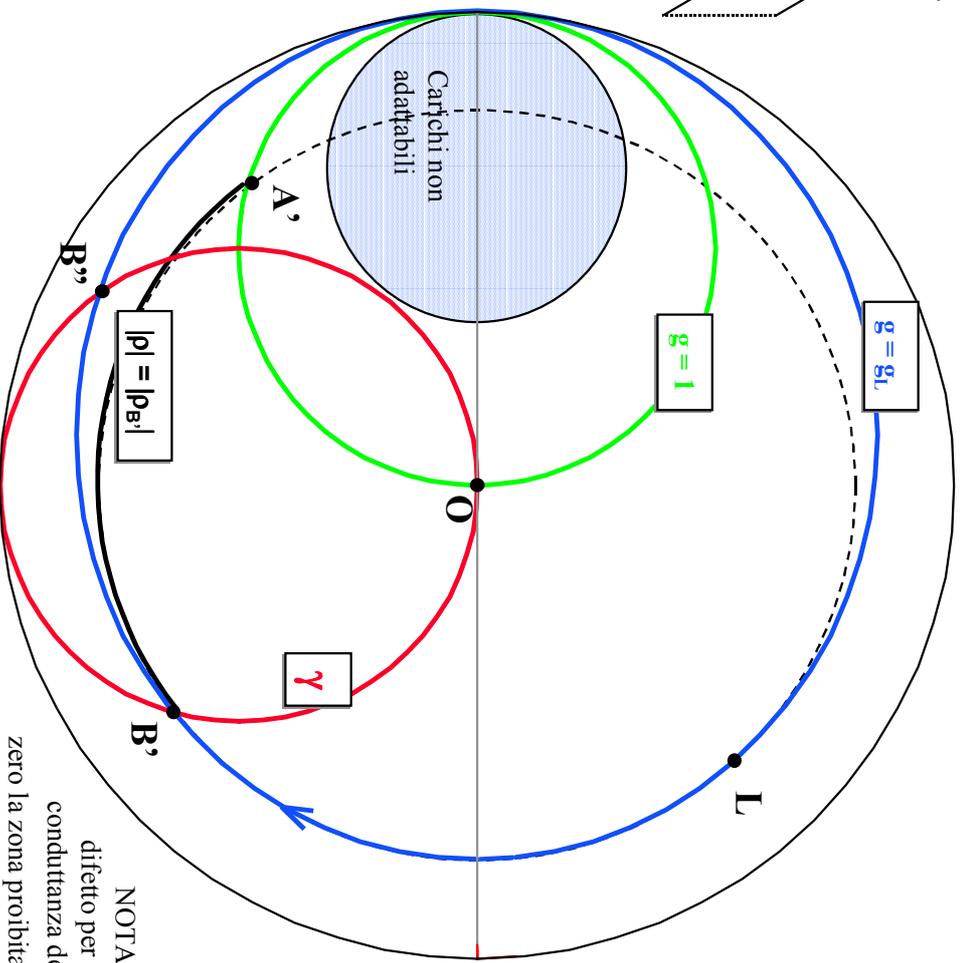
Motivazione: è spesso più semplice, dal punto di vista tecnico, variare la lunghezza degli stub che quella di un tratto di linea

Adattatore a doppio stub (2)

parametri di progetto
 ℓ_1, ℓ_2



- 1 La suscettanza del secondo stub deve essere $b_2 = b_3 - b_L$ (con $B = B' \text{ o } B''$)
 [si ricordi che $LB \text{ non}$ è un arco a $p = \text{cost}$, ma a $g = \text{cost} \Rightarrow$ non si può misurare direttamente la lunghezza dello stub]
- 2 L'arco $A'B'$ è determinato dalle posizioni relative delle circonferenze γ e $g=1$, quindi dalla lunghezza ℓ (nota)
- 3 La suscettanza del punto A viene annullata dal primo stub con $b_1 = -b_A$.
- 4 Le lunghezze ℓ_1, ℓ_2 si determinano come nel caso del semplice stub

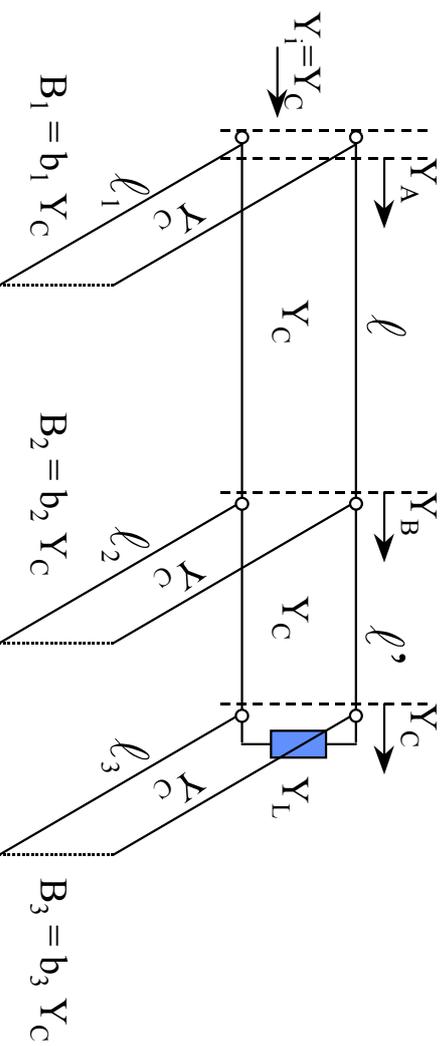


NOTA: il metodo cade in difetto per valori elevati della conduttanza del carico. Ridurre a zero la zona proibita portando ℓ a $\lambda/2$

Inoltre, le suscettanze b_1 e b_2 divergono elevate e difficili da controllare comporta una diminuzione della banda dell' adattatore.

Adattatore a triplo stub

parametri di progetto $\ell_1, \ell_2, [\ell_3]$

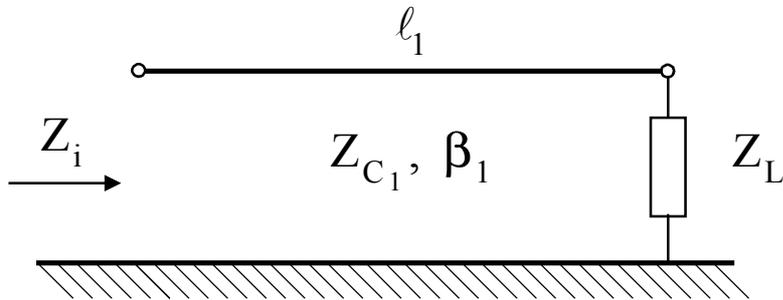


Lo stub presso il carico (assieme al tratto di linea) ha il compito di portare il coefficiente di riflessione fuori dalla zona proibita. Poi si procede come nel doppio stub.

Commutando tra due soli valori di ℓ_3 si ottiene la soluzione per ogni caso, lasciando solo due parametri da calcolare.

Il grado di libertà in eccesso può essere mantenuto. Ottimizzando le tre lunghezze si può migliorare la banda dell'adattatore

Adattatore con trasformatore a $\lambda/4$



Se, alla frequenza di lavoro, è $l_1 = \lambda/4$



$$Z_i = Z_{C_1} \frac{Z_L \cos \beta_1 l_1 + j Z_{C_1} \sin \beta_1 l_1}{Z_{C_1} \cos \beta_1 l_1 + j Z_L \sin \beta_1 l_1} = \frac{Z_{C_1}^2}{Z_L}$$

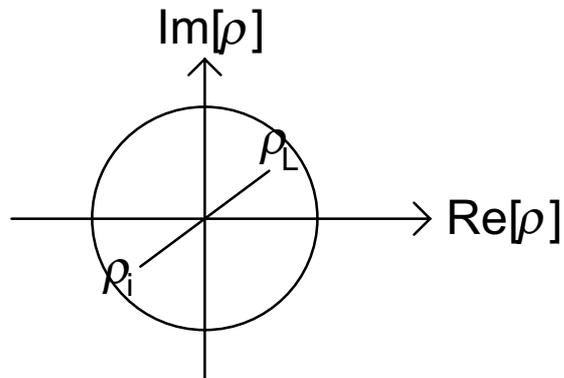
Si ottiene un cambiamento del livello di impedenza. In particolare, normalizzando si ottiene

$$z_i^1 = \frac{Z_i}{Z_{C_1}} = \frac{Z_{C_1}}{Z_L} = \frac{1}{z_L^1}$$

[ove l'apice ¹ sta ad indicare la normalizzazione rispetto alla impedenza caratteristica Z_{C_1}]

- Si chiama trasformatore a $\lambda/4$ ed è un **invertitore di impedenza** (normalizzata)

Lo stesso risultato avrebbe potuto essere ottenuto osservando che, sulla carta di Smith, il coefficiente di riflessione ruota di π attorno all'origine, infatti



$$\rho_i = \rho_L e^{-2j\beta\ell_1} = \rho_L e^{-j\pi} = -\rho_L$$

Il legame tra impedenza normalizzata e coefficiente di riflessione, $z = \frac{1+\rho}{1-\rho}$, mostra che un cambiamento di segno di ρ equivale alla trasformazione di z in $1/z$.

=====

Il trasformatore a $\lambda/4$ può quindi adattare una resistenza ad un'altra, in particolare può adattare un carico resistivo ad una linea priva di perdite ($Z_C \in \mathfrak{R}$).

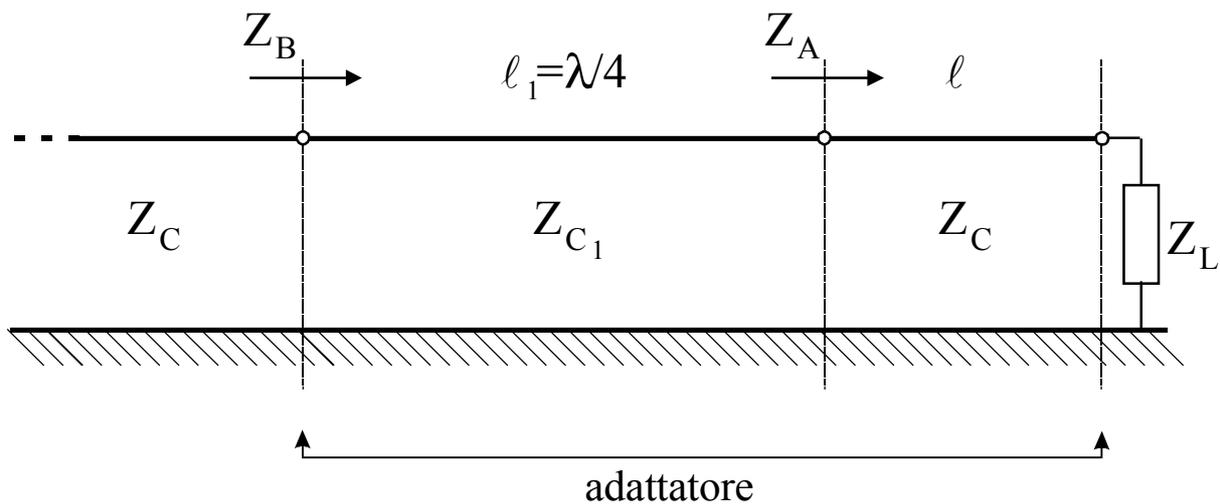
Infatti dalla $Z_i = \frac{Z_{C_1}^2}{Z_L}$, se $Z_L = R_L$ e si vuole che Z_i eguagli l'impedenza caratteristica Z_C di una linea, si ricava

$$\boxed{Z_{C_1} = \sqrt{R_L Z_C}}$$

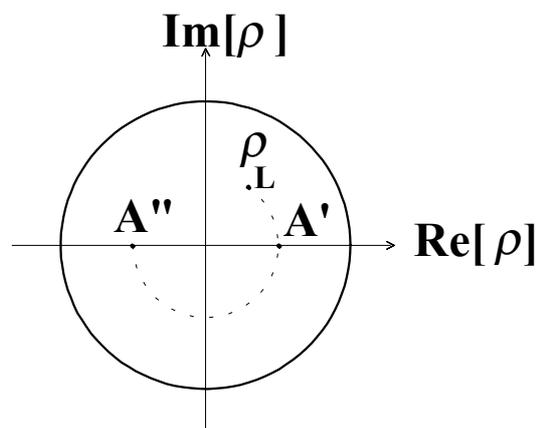
E' un adattamento *a banda stretta*, cioè valido per una prefissata frequenza di lavoro.

□ Adattamento di una impedenza complessa

Per una generica impedenza di carico, occorre utilizzare un ulteriore tronco di linea (ad es. di impedenza caratteristica Z_C) per mostrare un carico puramente resistivo al trasformatore.



- I due parametri liberi sono, in questo caso, l e Z_{C1}



Il tronco di linea l porta il punto rappresentativo in A' o A'' , ove l'impedenza è reale.

Ricordando la costruzione grafica introdotta nella discussione delle onde stazionarie, si osserva che A' e A'' corrispondono a un punto di massimo e a un punto di minimo della tensione, rispettivamente.

$$\text{In } A': \quad z'_i = \frac{Z'_i}{Z_C} = r'_i > 1, \text{ pi\`u precisamente } Z'_i = Z_C S$$

$$\text{In } A'': \quad z''_i = \frac{Z''_i}{Z_C} = r''_i < 1, \text{ pi\`u precisamente } Z''_i = Z_C / S$$

La lunghezza ℓ pu\`o essere letta sulla carta o calcolata ricordando le posizioni dei massimi (o minimi).

Imponendo $z|_{\text{MAX}} = -\ell$ (quindi scegliendo A')

$$\ell = \frac{\phi_L}{2\beta} + k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Z_{C1} pu\`o essere facilmente calcolata:

$$\text{In } A': \quad Z'_i = Z_C S \quad \Rightarrow \quad Z_{C1} = \sqrt{Z'_i Z_C} = Z_C \sqrt{S}$$

$$\text{In } A'': \quad Z''_i = Z_C / S \quad \Rightarrow \quad Z_{C1} = \sqrt{Z''_i Z_C} = \frac{Z_C}{\sqrt{S}}$$

- Sulla carta di Smith il valore del ROS si ottiene immediatamente leggendo il valore della resistenza normalizzata:

$$r_{A'} = S \quad \text{oppure} \quad r_{A''} = 1/S$$

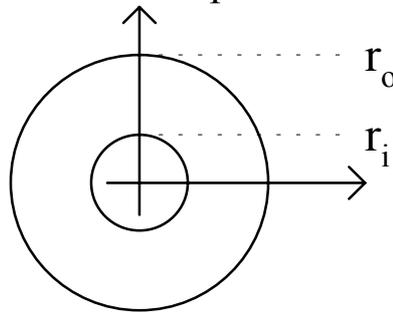
NOTA: La rappresentazione completa dell' adattatore a $\lambda/4$ sulla carta di Smith non sarebbe possibile, perch\`e si opera con *due diverse normalizzazioni*. Se si vuole comunque usare la carta per la visualizzazione del problema, occorre molta cautela nella definizione, e nel posizionamento, delle grandezze normalizzate.

□ Sulla scelta di A' o A''

Nei due casi si ottiene $Z_{C_1} = Z_C \sqrt{S} > Z_C$ o
 $Z_{C_1} = Z_C / \sqrt{S} < Z_C$

Dipendentemente dalla tecnologia utilizzata, potrà essere più conveniente effettuare l'una o l'altra scelta.

Ad esempio, per un cavo coassiale l'impedenza caratteristica è data da



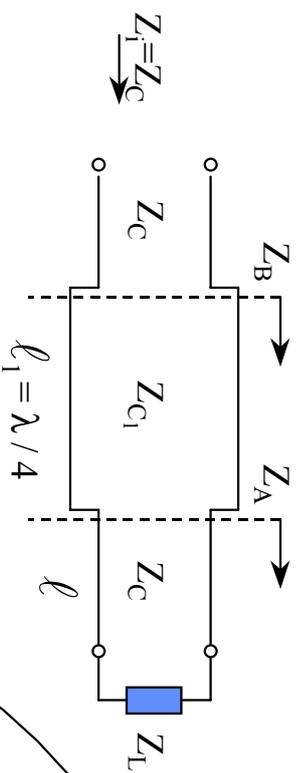
$$Z_C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{r_o}{r_i}$$

mentre r_o non può essere variato, r_i può essere aumentato mediante l'uso di un manicotto metallico infilato sul conduttore interno. Non altrettanto facilmente si può diminuirlo.

Essendo possibile la realizzazione di una impedenza $Z_{C_1} < Z_C$ e non il contrario, è necessario scegliere la sezione di minimo (A'').

Adattatore a $\lambda / 4$

parametri di progetto
 ℓ, Z_{C1}



1 Il tronco di linea ℓ trasforma l'impedenza di carico Z_L (complessa) nell'impedenza (reale) di un punto di massimo ($Z_{A'} = Z_C S$) o di minimo ($Z_{A''} = Z_C / S$). [Si scelga A']

2 NUOVA NORMALIZZAZIONE

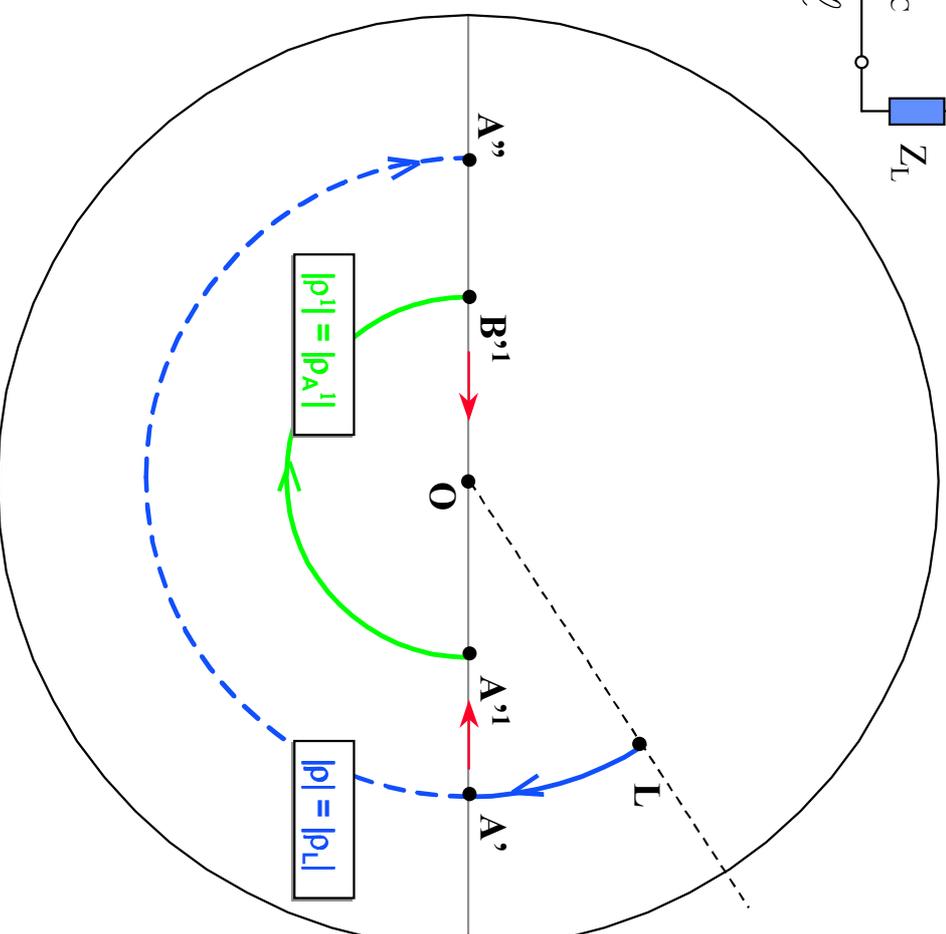
rispetto a $Z_{C1} = Z_C \sqrt{S}$
Si passa da $Z_{A'} = Z_{A'} / Z_C = S$
a $Z_{A',1} = Z_{A'} / Z_{C1} = \sqrt{S}$

3 Inversione dell'impedenza normalizzata attraverso la sezione a $\lambda / 4$

$Z_{B',1} = 1 / Z_{A',1} = 1 / \sqrt{S}$

4 Con la **DENORMALIZZAZIONE** si ottiene

$Z_{B'} = Z_{B',1} \cdot Z_{C1} = Z_C$

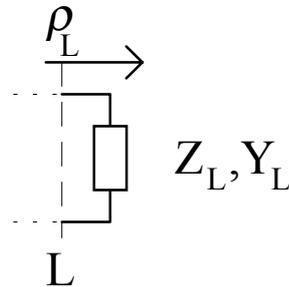


Adattatori a costanti concentrate

Carico:

$$Z_L = Z_C(r_L + jx_L)$$

$$Y_L = Y_C(g_L + jb_L)$$

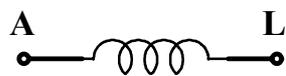


Premessa:

Se a monte del carico si connette un componente reattivo in serie, di reattanza x_1 , si ottiene la impedenza normalizzata complessiva $r_L + j(x_L + x_1)$, cioè ci si sposta ad un altro punto della circonferenza a resistenza costante $r = r_L$.

Se il componente è in parallelo la circonferenza sarà quella a conduttanza costante $g = g_L$.

Si verificano 4 casi:



$$x > 0$$



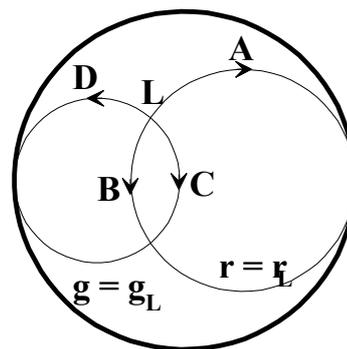
$$x < 0$$



$$b > 0$$

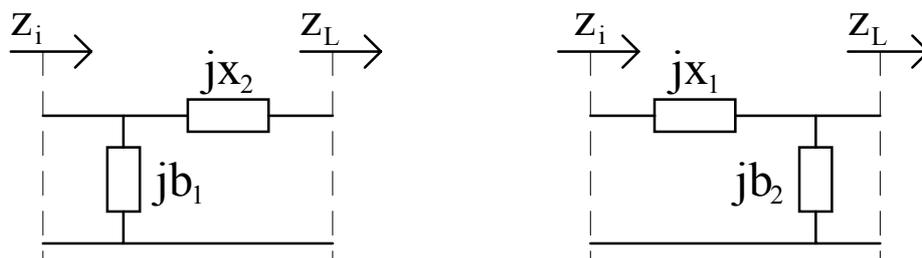


$$b < 0$$



★ Si noti che lo stesso effetto sarebbe prodotto da stub in serie o in parallelo opportunamente terminati (c.a. o c.c.) e di adeguata lunghezza.

□ L' **adattamento** si realizza mediante celle a "L" di elementi reattivi.



Gli elementi in **serie** vengono più convenientemente descritti tramite la loro **reattanza**, e il loro effetto è uno spostamento lungo una curva a $r = \text{cost}$.

Gli elementi in **parallelo** vengono più convenientemente descritti tramite la loro **suscettanza**, e il loro effetto è uno spostamento lungo una curva a $g = \text{cost}$.

I due elementi della cella generano due archi di circonferenza a resistenza o conduttanza costante. Occorre fare sì che il percorso che ne risulta porti il punto rappresentativo dal carico (con coefficiente di riflessione ρ_L) all' origine della carta di Smith ($\rho = 0$).

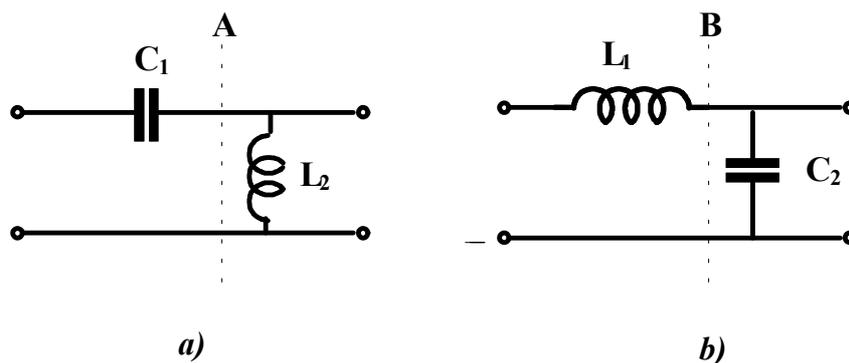
Dipendentemente dal **tipo di carico**, si possono distinguere 4 situazioni:

- 1) $r_L > 1$
- 2) $g_L > 1$
- 3) $r_L < 1, g_L < 1, x_L > 0$
- 4) $r_L < 1, g_L < 1, x_L < 0$

Nota: sarà presto evidente che $r_L = 1$ o $g_L = 1$ rappresentano casi particolari, in cui un solo elemento è sufficiente per l'adattamento, mentre è immediato riconoscere che $r_L = g_L = 1$ equivale ad un carico adattato.

1) $r_L > 1$

Il punto L è interno alla circonferenza $r = 1$. Sono possibili 2 percorsi, corrispondenti alle celle



Nel caso a), corrispondente al percorso LAO sulla carta di Smith, si ha una diminuzione della suscettanza, poi una diminuzione della reattanza (procedendo verso il generatore). Il contrario si ha nel caso b) (percorso LBO).

Nel caso a) si ottiene:

$$y_A = g_A + jb_A = g_L + jb_L + jb_2 \quad (\text{ammettenza normalizzata nella sezione A})$$

quindi $b_2 = b_A - b_L < 0$ (da cui la necessità dell' induttore)

Ricordando che $x_2 = -\frac{1}{b_2}$, e che, ad una data pulsazione ω_0 , la reattanza normalizzata dell' induttore vale $x_2 = \frac{\omega_0 L_2}{Z_C}$, si ricava

$$L_2 = \frac{Z_C}{\omega_0(b_L - b_A)}$$

Il condensatore C_1 ha invece il compito di annullare la reattanza x_A , cioè $x_A + x_1 = 0$

Poichè $x_1 = -\frac{1}{b_1}$ e $b_1 = \frac{\omega_0 C_1}{Y_C}$, segue immediatamente

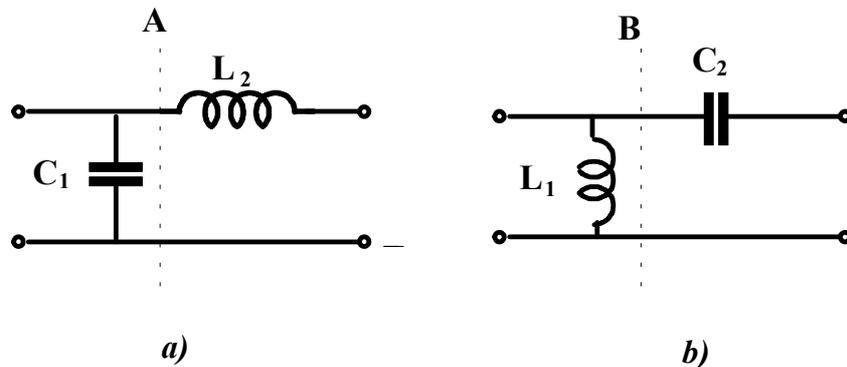
$$\boxed{C_1 = \frac{Y_C}{\omega_0 x_A}}$$

Il caso b) si svolge analogamente.

Nota: l' altro tipo di celle a "L" non può soddisfare le condizioni di adattamento perchè la circonferenza a $r = r_L = \text{cost}$ non interseca la circonferenza $g = 1$.

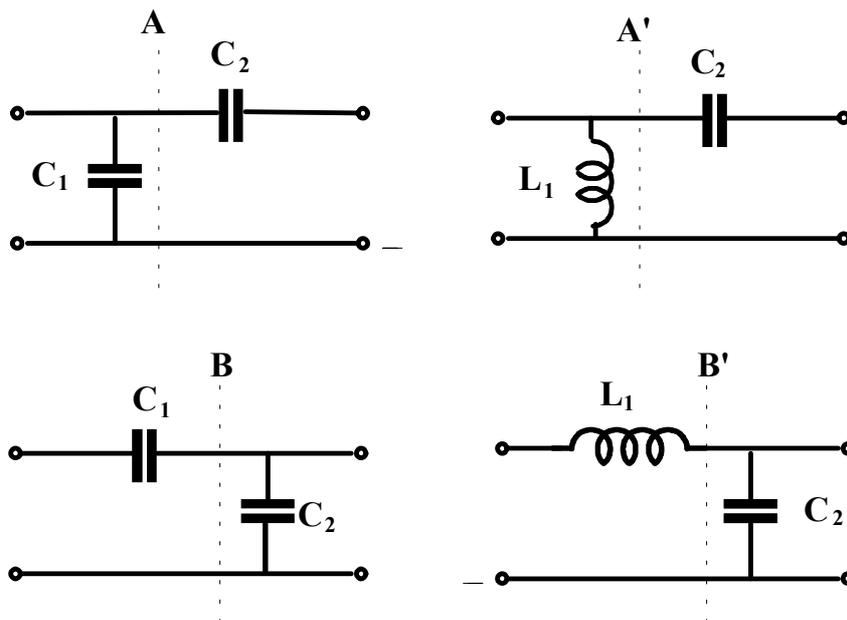
2) $g_L > 1$

Il punto L è all' interno della circonferenza $g = 1$. Tutta la trattazione è, ovviamente, analoga alla precedente. le celle possibili sono:



3) $r_L < 1, g_L < 1, x_L > 0$

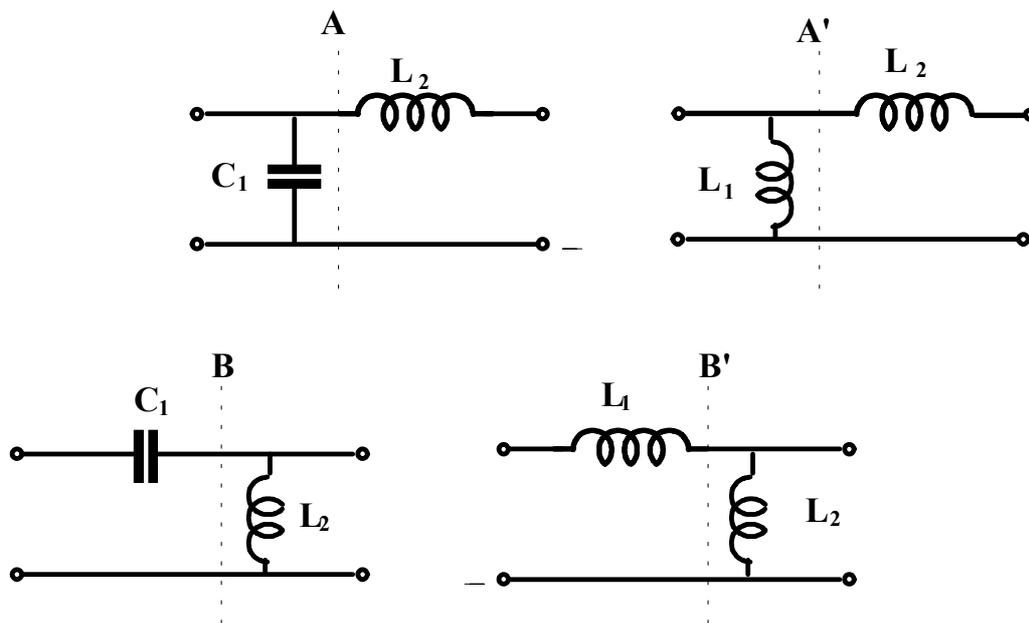
Il punto L è esterno a entrambe le circonferenze $r = 1$ e $g = 1$. Dalla carta di Smith sono immediatamente individuabili i 4 percorsi (LAO, LA'O, LBO, LB'O) che corrispondono alle celle seguenti



4) $\boxed{r_L < 1, g_L < 1, x_L < 0}$

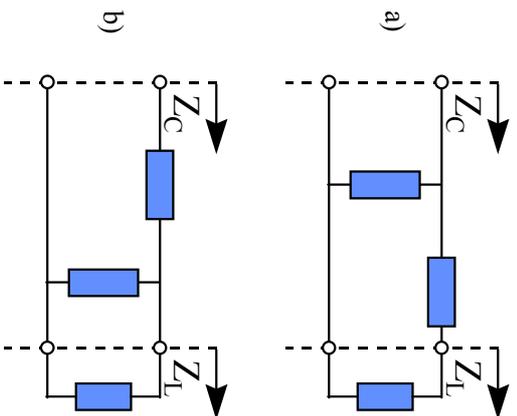
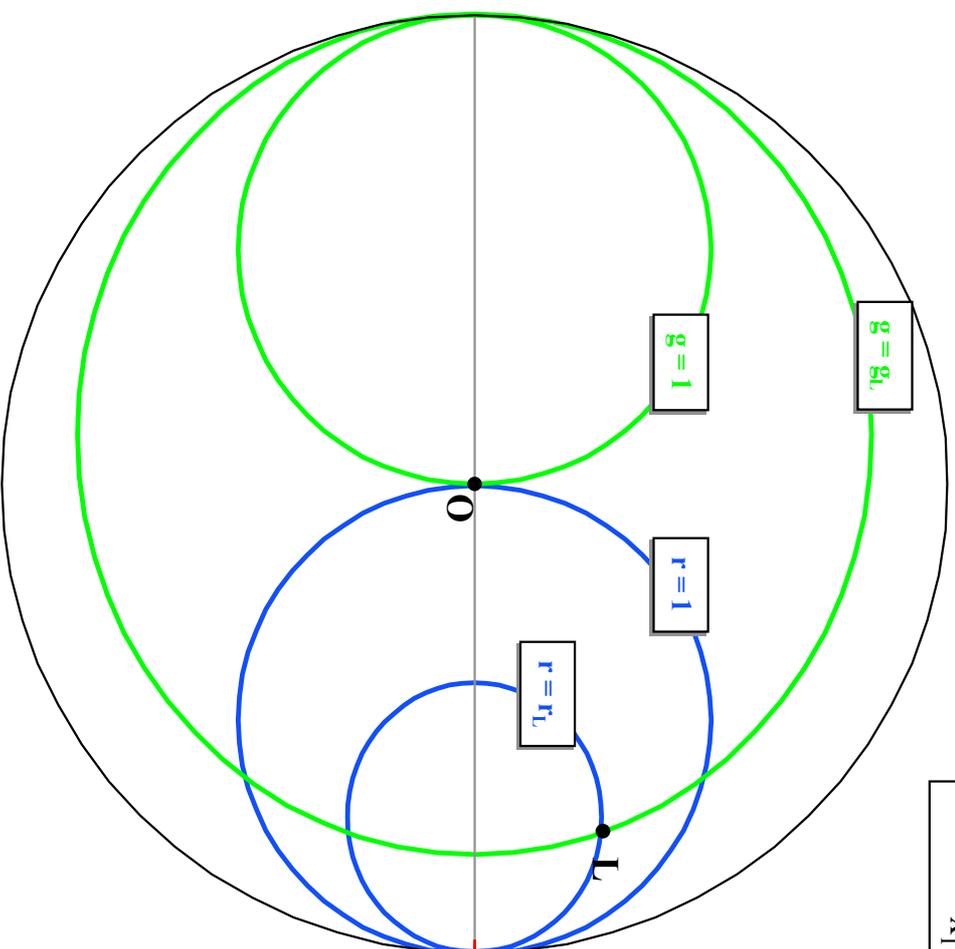
[Si noti che nella figura, per semplicità, si è utilizzato il punto L' speculare a L]

Analogamente al caso 3), si trovano 4 possibili celle:

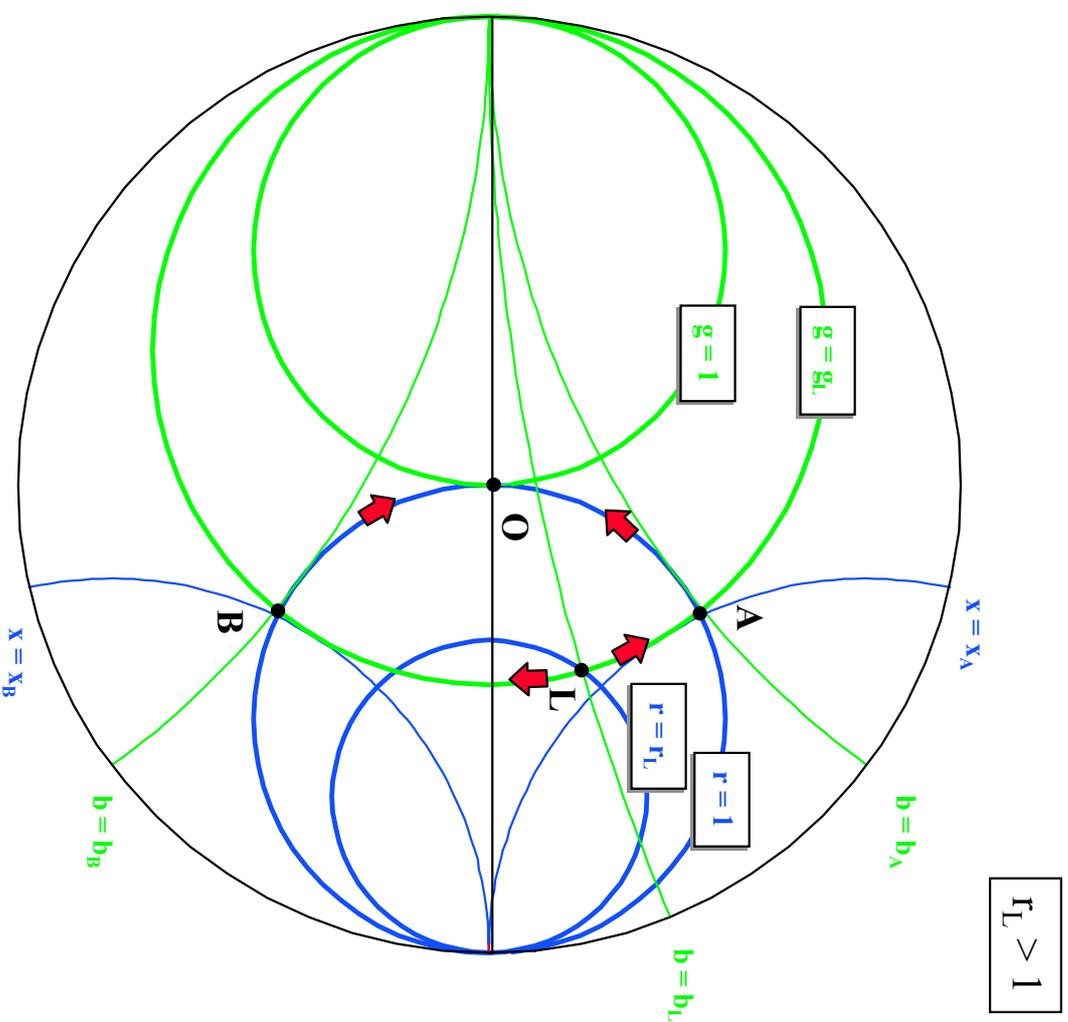


Adattatori a costanti concentrate (1)

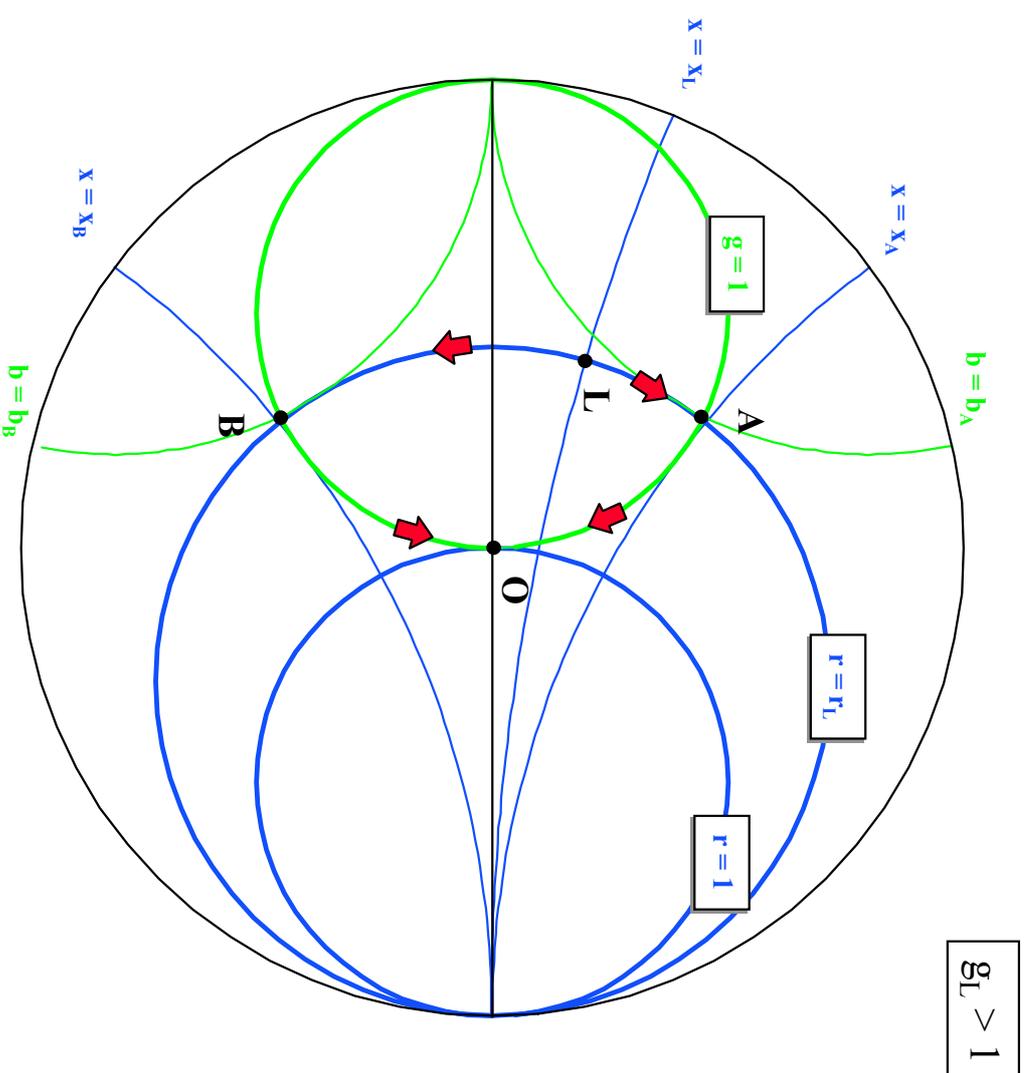
parametri di progetto
 x_1, x_2



Adattatori a costanti concentrate (2)



Adattatori a costanti concentrate (3)



Adattatori a costanti concentrate (4)

$$r_L < 1, g_L < 1$$

