Capitolo 2

Linee di trasmissione

2.1 Propagazione TEM

2.1.1 Derivazione delle equazioni delle linee

Lo scopo principale di questo corso è di analizzare il collegamento tra carichi e generatori mediante dei conduttori; anzi mediante particolari strutture conduttive che chiameremo linee di trasmissione.

Le linee di trasmissione che studieremo sono strutture conduttive che possiedono una simetria di traslazione, ciò significa che lungo tali conduttori è possibile individuare una direzione (direzione longitudinale) lungo la quale la sezione trasversale (la sezione ortogonale alla direzione longitudinale) rimane invariata (vedi esempi di linee di trasmissione).

Nei collegamenti che studieremo non è più possibile pensare che tutte le dimensioni siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda, ad esempio alla frequenza di $1GHz = 10^9 Hz$ la lunghezza d'onda è 30 cm che può essere anche molto piccola rispetto al collegamento che si sta studiando (vedi esempio: collegamento tra stazione base ed antenna trasmittente). D'altronde se la sezione trasversa della linea è piccola rispetto alla lunghezza d'onda potremmo pensare di applicare i ragionamenti dei circuiti a parametri concentrati almeno in tale sezione. Anzi supponiamo proprio di poter introdurre nel piano trasverso un potenziale tale che la tensione V tra i conduttori esprimibile come $V = \int_A^B \underline{E} \cdot \widehat{i}_l dl$ sia indipendente dal percorso purchè questo rimanga nel piano trasverso. In tal caso, notando che $\underline{E} \cdot \widehat{i}_l = \underline{E}_t \cdot \widehat{i}_l$, dove, con riferimento alla figura 2 $\underline{E}_t = \underline{E} - E_z \widehat{i}_z = E_x \widehat{i}_x + E_y \widehat{i}_y$ deve verificarsi che

$$\underline{E}_t = -\nabla_t \phi \tag{2.1}$$

dove $\nabla_t = \nabla - \widehat{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$ (in coordinate cartesiane $\nabla_t = \frac{\partial}{\partial x} \widehat{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \widehat{i}_y$), e

$$V = \phi_A - \phi_B \tag{2.2}$$

e quindi

$$\nabla_t \times \underline{E}_t = 0. \tag{2.3}$$

Riguardo al campo magnetico supponiamo, coerentemente con le approssimazioni dei circuiti a parametri concentrati, che

$$\oint_{\partial S} \underline{H} \cdot \widehat{i}_c dc = \int_S \underline{J} \cdot \widehat{i}_n dS \tag{2.4}$$

Anche in questo caso notiamo che $\underline{H}\cdot\widehat{i}_c = \underline{H}_t \cdot \widehat{i}_c, \widehat{i}_n = \widehat{i}_z$ e $\underline{J}\cdot\widehat{i}_n = J_z$ e quindi

$$\oint_{\partial S} \underline{H}_t \cdot \widehat{i}_c dc = \int_S J_z dS \tag{2.5}$$

ovvero

$$\nabla_t \times \underline{H}_t = J_z \widehat{i}_z. \tag{2.6}$$

Analizziamo ora le implicazioni che tali assunzioni hanno sulle equazioni di Maxwell. Riscriviamo quindi le equazioni di Maxwell evidenziando le componenti trasverse all'asse z e quelle longitudinali. A tal fine scomponiamo anche l'operatore ∇ nella sua parte trasversa ∇_t e in quella longitudinale. Con tali sostituzioni e supponendo di trovarci in una regione dove sono nulle le densità di corrente e di carica, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_t + \widehat{i}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\underline{E}_t + E_z \widehat{i}_z\right) &= -j\omega\mu \left(\underline{H}_t + H_z \widehat{i}_z\right) && (2.7a)\\
\left(\nabla_t + \widehat{i}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\underline{H}_t + H_z \widehat{i}_z\right) &= j\omega\varepsilon \left(\underline{E}_t + E_z \widehat{i}_z\right) && (2.7b)\\
\left(\nabla_t + \widehat{i}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\varepsilon\underline{E}_t + \varepsilon E_z \widehat{i}_z\right) &= 0 && (2.7c)\\
\left(\nabla_t + \widehat{i}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mu\underline{H}_t + \mu H_z \widehat{i}_z\right) &= 0 && (2.7d)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\nabla_t \times \underline{E}_t &= -j\omega\mu H_z \widehat{i}_z && (2.8a)\\
\widehat{i}_z \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} &= -j\omega\mu \underline{H}_t - \nabla_t \times \left(E_z \widehat{i}_z\right) && (2.8b)\\
\nabla_t \times \underline{H}_t &= j\omega\varepsilon E_z \widehat{i}_z && (2.8c)\\
\widehat{i}_z \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} &= j\omega\varepsilon \underline{E}_t - \nabla_t \times \left(H_z \widehat{i}_z\right) && (2.8d)\\
\nabla_t \cdot \left(\varepsilon \underline{E}_t\right) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon E_z\right) && (2.8e)\\
\nabla_t \cdot \left(\mu \underline{H}_t\right) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu H_z\right) && (2.8f)
\end{aligned}$$

Confrontando le **??** con le 2.3 e 2.6 in assenza di sorgenti, ricaviamo che deve essere $E_z = H_z = 0$; supponendo inoltre ε e μ indipendenti dal punto[1] si ottiene

$$\begin{aligned}
\nabla_t \times \underline{E}_t &= 0 && (2.9a)\\
\nabla_t \times \underline{H}_t &= 0 && (2.9b)\\
\nabla_t \cdot \underline{E}_t &= 0 && (2.9c)\\
\nabla_t \cdot \underline{E}_t &= 0 && (2.9d)\\
\widehat{i}_z \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} &= -j\omega\mu \underline{H}_t && (2.9e)\\
\widehat{i}_z \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} &= j\omega\varepsilon \underline{E}_t && (2.9f)
\end{aligned}$$

Moltiplicando vettorialmente a destra le 2.9e e 2.9f si ottengono le equazioni per le componenti trasverse

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} &= -j\omega\mu \underline{H}_t \times \widehat{i}_z && (2.10a)\\
\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} &= -j\omega\varepsilon \widehat{i}_z \times \underline{E}_t && (2.10b)
\end{aligned}$$

[1] In realtà è sufficiente che al più $\varepsilon = \varepsilon(z)$ e $\mu = \mu(z)$.

Integrando la prima su una linea trasversale che vada da un conduttore all'altro, essendo $\nabla_t \times \underline{E}_t = 0$ l'integrale del primo membro non dipende dal percorso e risulta

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial z} \underline{E}_t \cdot \widehat{i}_l dl = \frac{d}{dz} \int_A^B \underline{E}_t \cdot \widehat{i}_l dl = \frac{d}{dz} (V_A - V_B) = \frac{dV}{dZ}. \tag{2.11}$$

Analizziamo il secondo membro

$$\int_A^B \mu \left(\underline{H}_t \times \widehat{i}_z \right) \cdot \widehat{i}_l dl = \int_A^B \mu \left(\widehat{i}_z \times \widehat{i}_l \right) \cdot \underline{H}_t dl = \int_A^B \mu \widehat{i}_n \cdot \underline{H}_t dl \tag{2.12}$$

Ma la quantità

$$\int_z^{z+\Delta z} \int_A^B \mu \widehat{i}_n \cdot \underline{H}_t dl dz \overset{\Delta z \to 0}{=} \Delta z \int_A^B \mu \widehat{i}_n \cdot \underline{H}_t dl \tag{2.13}$$

è il flusso di $\underline{B} = \mu \underline{H}$ attraverso la superficie indicata in figura e quindi $\Phi = \int_A^B \mu \widehat{i}_n \cdot \underline{H}_t dl$ è il flusso per unità di lunghezza. Tale flusso, per la linearità del problema, è legato alla corrente che circola nei conduttori dalla relazione $\Phi = LI$ con L induttanza per unità di lunghezza della linea; in tal modo, la 2.10a diventa

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega LI. \tag{2.14}$$

Passiamo ora alla 2.10b che integriamo su un circuito semplice nel piano trasverso. Tale integrale non dipende dalla linea scelta in quanto $\nabla_t \times \underline{H}_t = 0$ (sulla linea) purchè questa giri una sola volta intorno a un conduttore. Il primo membro ci fornisce

$$\frac{d}{dz} \int_C \underline{H}_t \cdot \widehat{i}_c dc = \frac{d}{dz} \int_S \nabla_t \times \underline{H}_t \cdot \widehat{i}_z dS = \frac{dI}{dz} \tag{2.15}$$

Analizziamo ora il secondo membro

$$\varepsilon \int_C \left(\widehat{i}_z \times \underline{E}_t \right) \cdot \widehat{i}_c dc = \varepsilon \int_C \left(\widehat{i}_c \times \widehat{i}_z \right) \cdot \underline{E}_t dc = \varepsilon \int_C \underline{E}_t \cdot \widehat{i}_n dc \tag{2.16}$$

Ma in questo la quantità

$$\int_z^{z+\Delta z} \int_C \varepsilon \underline{E}_t \cdot \widehat{i}_n dc dz \overset{\Delta z \to 0}{=} \Delta z \int_C \varepsilon \underline{E}_t \cdot \widehat{i}_n dc = \Delta z \int_V \nabla \cdot (\varepsilon \underline{E})\, dV =$$
$$= \Delta z \int_V \nabla_t \cdot (\varepsilon \underline{E}_t)\, dV = \Delta z \int_V \rho dV \tag{2.17}$$

è la carica interna al volume, per cui $Q = \int_C \varepsilon \underline{E}_t \cdot \widehat{i}_n dc$ è la carica su un conduttore per unità di lunghezza. Sempre per la linearità $Q = CV$ dove C è la capacità per unità di lunghezza, e di conseguenza la 2.10b diviene

$$\frac{dI}{dz} = -j\omega CV. \tag{2.18}$$

Abbiamo quindi introdotto una tensione e una corrente lungo la linea legate dalle equazioni

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega LI \tag{2.19a}$$

$$\frac{dI}{dz} = -j\omega CV \tag{2.19b}$$

dette equazioni delle linee.

Tali tensioni e correnti forniscono anche l'ampiezza dei campi elettrici e magnetici trasversi. In effetti, come abbiamo detto, la distribuzione trasversa dei campi non varia con z a meno di un fattore di ampiezza. Possiamo quindi porre

$$\underline{E}_t = V(z)\,\underline{e}_t(x,y) \tag{2.20a}$$

$$\underline{H}_t = I(z)\,\underline{h}_t(x,y) \tag{2.20b}$$

dove $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ sono tali che

$$\int_A^B \underline{e}_t \cdot \widehat{i}_l dl = 1 \tag{2.21a}$$

$$\int_C \underline{h}_t \cdot \widehat{i}_c dc = 1 \tag{2.21b}$$

in tal modo le 2.10 si possono riscrivere

$$\underline{e}_t \frac{dV}{dz} = -j\omega\mu I \underline{h}_t \times \widehat{i}_z \tag{2.22a}$$

$$\underline{h}_t \frac{dI}{dz} = -j\omega\varepsilon V \widehat{i}_z \times \underline{e}_t \tag{2.22b}$$

Confrontando tali equazioni con le 2.21 otteniamo

$$\underline{e}_t(-j\omega LI) = -j\omega\mu I \underline{h}_t \times \widehat{i}_z \tag{2.23}$$

ovvero

$$\underline{e}_t = \frac{\mu}{L}\left(\underline{h}_t \times \widehat{i}_z\right) \tag{2.24}$$

e

$$\underline{h}_t(-j\omega CV) = -j\omega\varepsilon V \widehat{i}_z \times \underline{e}_t \tag{2.25}$$

ovvero

$$\underline{h}_t = \frac{\varepsilon}{C}\left(\widehat{i}_z \times \underline{e}_t\right). \tag{2.26}$$

Sostituiamo la 2.24 nella 2.26, ovvero moltiplichiamo vettorialmente la 2.24 per $\widehat{i}_z$, ottenendo

$$\widehat{i}_z \times \underline{e}_t = \frac{\mu}{L}\underline{h}_t \tag{2.27}$$

da cui

$$\underline{h}_t = \frac{\varepsilon}{C}\frac{\mu}{L}\underline{h}_t \Rightarrow \varepsilon\mu = LC. \tag{2.28}$$

Inoltre, sostituendo $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ nelle espressioni del flusso e della carica, otteniamo

$$\Phi = LI = I\int_A^B \mu\underline{h}_t\cdot\widehat{i}_n dl \Rightarrow L = \int_A^B \mu\underline{h}_t\cdot\widehat{i}_n dl \tag{2.29}$$

$$Q = CV = V\int_C \varepsilon\underline{e}_t\cdot\widehat{i}_n dc \Rightarrow C = \int_C \varepsilon\underline{e}_t\cdot\widehat{i}_n dc. \tag{2.30}$$

Infine, l'equazione $\nabla_t\times\underline{E}_t = 0$ diviene

$$\nabla_t\times\underline{e}_t = 0 \Rightarrow \underline{e}_t = -\nabla_t\phi \tag{2.31}$$

e $\nabla_t\cdot\underline{E}_t = 0$ diventa

$$\nabla_t\cdot\underline{e}_t = 0 \Rightarrow \nabla_t^2\phi = 0. \tag{2.32}$$

Tale equazione è un'equazione di tipo statico non coinvolgendo quantità dipendenti dal tempo o dalla frequenza e di conseguenza statici sono i campi $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ e infine L e C risultano essere costanti indipendenti dalla frequenza, ovvero delle induttanze e capacità.

2.1.2 Le equazioni delle linee nel dominio del tempo

Nel paragrafo precedente sono state ricavate le equazioni delle linee nel dominio della frequenza

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega LI \tag{2.33a}$$

$$\frac{dI}{dz} = -j\omega CV \tag{2.33b}$$

Se L e C non dipendono da ω o se la banda del segnale (V o I) è tanto stretta da poter ritenere costanti L e C in tale banda, è immediato passare nel dominio del tempo e studiare l'evoluzione spaziale e temporale della tensione e della corrente lungo una linea di trasmissione. Basta infatti sostituire formalmente a $j\omega$ $\frac{\partial}{\partial t}$ e a $\frac{d}{dz}$ $\frac{\partial}{\partial z}$, ottenendo

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{2.34a}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C\frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.34b}$$

Questo è un sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali in due incognite scalari e può essere risolto per sostituzione. Deriviamo la prima equazione rispetto a z

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L\frac{\partial^2 i}{\partial t\partial z} \tag{2.35}$$

permutiamo l'ordine di derivazione e sostituiamo la 2.34b, ottenendo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L\frac{\partial}{\partial t}\left(-C\frac{\partial v}{\partial t}\right) = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.36}$$

ovvero la forma più semplice di equazione delle onde:a

La soluzione di tale equazione è

$$v(z,t) = v_1(z-ct) + v_2(z+ct) \tag{2.37}$$

dove $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ovvero è la somma di due funzioni arbitrarie, una di $(z-ct)$ l'altra di $(z+ct)$. Per verificarlo, essendo la 2.37 lineare, sostituiamo in essa prima v_1 e poi v_2.

Verifica per $v_1 (z - ct)$

Poniamo z-ct=$\xi_1 (z, t)$ e quindi v$_1$ $(\xi_1 (z, t))$; si ottiene

$$\frac{\partial v_1 (\xi_1 (z,t))}{\partial z} = \frac{dv_1}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{dv_1}{d\xi} \tag{2.38}$$

essendo $\frac{\partial(z-ct)}{\partial z} = 1$, e quindi

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} \tag{2.39}$$

mentre

$$\frac{\partial v_1 (\xi_1 (z,t))}{\partial t} = \frac{dv_1}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{dv_1}{d\xi}(-c) \tag{2.40}$$

essendo $\frac{\partial(z-ct)}{\partial t} = -c$, e quindi

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2}(-c)(-c) = c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} \tag{2.41}$$

Sostituendo le derivate cosı̀ ottenute in 2.36 otteniamo

$$\frac{d^2 v_1}{d\xi^2} - LCc^2\frac{d^2 v_1}{d\xi^2} = 0 \tag{2.42}$$

che è verificata se c^2 $= \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Verifica per $v_2 (z + ct)$

Si procede allo stesso modo, ponendo $\xi_2 = z + ct$; l'unica differenza è che ora

$$\frac{\partial v_2 (\xi_2 (z,t))}{\partial t} = \frac{dv_2}{d\xi_2}\frac{d\xi_2}{dt} = c\frac{dv_2}{d\xi_2} \tag{2.43}$$

e ancora

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi_2^2} \tag{2.44}$$

e quindi sostituendo nella 2.36 otteniamo nuovamente la 2.42 che è verificata se $c^2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Analizziamo ora il significato di tali soluzioni. Esse rappresentano la propagazione di due segnali nella direzione longitudinale della linea (l'asse z di figura) in sensi opposti; infatti la funzione$v_1 (z - ct)$ assume lo stesso valore in tutti i punti ed istanti di tempo per i quali $z - ct$ assume un prefissato valore. Ad esempio, se nel punto z_1 e nell'istante t_1 $v_1 (z - ct) = \overline{v}_1$, questo sarà il valore che v_1 assume anche nel punto $z_1 + \Delta z$ nell'istante $t_1 + \Delta t$ purchè

$$z_1 - ct_1 = z_1 + \Delta z - c(t_1 + \Delta t) \tag{2.45}$$

ovvero se $\Delta z - c\Delta t = 0$. In altre parole v_1 assume il valore $\overline{v}_1$ nel punto $z_1 + \Delta z$ nell'istante di tempo $t_1 + \frac{\Delta z}{c}$. Il segnale v_1 si "sposta" rigidamente con velocità c nel senso positivo delle z.

Per v_2 vale un discorso analogo. Se $v_2 (z_1 + ct_1) = \overline{v}_2$ anche

$$v_2\left(z_2 + \Delta z + c\left(t_1 - \frac{\Delta z}{c}\right)\right) = \overline{v}_2 \tag{2.46}$$

e quindi v_2 è un segnale che si "sposta" rigidamente con velocità c nel senso negaivo delle z.

Riguardo la corrente $i\left(z,t\right)$ si può procedere in modo analogo derivando la seconda delle 2.34 rispetto a z e sostituendo la prima, ottenendo

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2}-LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 \tag{2.47}$$

la cui soluzione è ancora nella forma

$$i\left(z,t\right)=i_1\left(z-ct\right)+i_2\left(z+ct\right). \tag{2.48}$$

D'altra parte $i\left(z,t\right)$ e $v\left(z,t\right)$ sono legate dal sistema 2.34 e si può ricavare la corrente dalla tensione e viceversa, anzi $v_1\left(\xi_1\right)$ è legato a $i_1\left(\xi_1\right)$ e $v_2\left(\xi_2\right)$ a $i_2\left(\xi_2\right)$ in quanto funzioni delle stesse variabili. Sostituiamo prima v_1 e i_1 in 2.34a ottenendo

$$\frac{dv_1}{d\xi_1}=-L\left(-C\right)\frac{di_1}{d\xi_1} \tag{2.49}$$

e quindi, a meno di una inessenziale costante

$$\begin{aligned} v_1\left(z-ct\right) &= Lci_1\left(z-ct\right)=\frac{L}{\sqrt{LC}}i_1\left(z-ct\right) && (2.50)\\ v_1 &= \sqrt{\frac{L}{C}}i_1. && (2.51)\end{aligned}$$

Analogamente sostituendo v_2 e i_2 otteniamo

$$v_2\left(z+ct\right)=-Lci_2\left(z+ct\right)=-\frac{L}{\sqrt{LC}}i_2\left(z+ct\right) \tag{2.52}$$

ovvero

$$v_2=-\sqrt{\frac{L}{C}}i_2. \tag{2.53}$$

Il rapporto $Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$ è detto impedenza caratteristica della linea. Tensione e corrente su una linea possono quindi essere rappresentate dalla sovrapposizione di due funzioni rappresentanti il segnale (onda progressiva) che si propaga nel senso positivo dell'asse z, e il segnale (onda retrograda) che si propaga nel senso negativo dell'asse z

$$\begin{aligned} v\left(z,t\right) &= v_1\left(z-ct\right)+v_2\left(z+ct\right) && (2.54)\\ i\left(z,t\right) &= \frac{v_1\left(z-ct\right)}{Z_0}-\frac{v_2\left(z+ct\right)}{Z_0} && (2.55)\end{aligned}$$

L'onda progressiza di tensione è legata all'onda progressiva di corrente da

$$v_1\left(z,t\right)=Z_0 i_1\left(z,t\right) \tag{2.56}$$

e l'onda retrograda di tensione a quella retrograda di corrente da

$$v_2\left(z,t\right)=-Z_0 i_2\left(z,t\right). \tag{2.57}$$

Notiamo che l'apparente differenza tra i due legami è legata solo alla diversa convenzione scelta per le due onde.