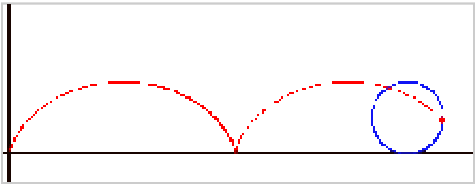
Cicloide

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In geometria, la **cicloide** (dal greco *kykloeidés*, *kýklos* "cerchio" e -*oeidés* 'forma', cioè che è fatto da un cerchio) è una curva piana appartenente alla categoria delle rullette. Essa è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che *rotola* lungo una retta; in pratica il disegno composto da un punto su una ruota di bicicletta in movimento.

La cicloide fu studiata per la prima volta da Nicola Cusano e ricevette il suo nome nel 1599 da Galileo. Si dedicarono allo studio di questa curva anche Torricelli, Fermat, Cartesio, Huygens, Bernoulli e Newton.



Una cicloide (in rosso) è generata da un punto su una circonferenza (in blu) che rotola su di una retta.

Indice

- 1 Proprietà geometriche
- 2 Relazioni con la circonferenza
  - 2.1 Area
- 3 Forma matematica
  - 3.1 Area
  - 3.2 Baricentro
  - 3.3 Proprietà
- 4 Trocoide
- 5 Note
- 6 Bibliografia
- 7 Voci correlate
- 8 Altri progetti
- 9 Collegamenti esterni

Proprietà geometriche

- L'evoluta e l'involuta della cicloide sono a loro volta due cicloidi identiche.
- È la curva che risolve il problema della tautocrona ovvero le oscillazioni su di un arco di cicloide sono esattamente isocrone (e non solo approssimativamente come in un pendolo semplice).
- Risolve il problema della brachistocrona ovvero la curva su cui una massa che scivola impiega meno tempo per percorrere il tragitto fra due punti dati è un arco di cicloide.

Relazioni con la circonferenza

Le dimensioni di una cicloide sono strettamente legate a quella della circonferenza generatrice:

1. l'altezza massima dell'arco è pari al suo diametro;
2. la lunghezza di un arco di cicloide è quattro volte il diametro[1], ovvero l'altezza $4h$;

3. la base sottostante l'arco è pari alla circonferenza[2], ovvero πh;
4. l'area compresa fra un arco di cicloide e la base è tre volte l'area del cerchio.

Area

L'area sottostante la cicloide è pari a 3 volte l'area del cerchio generatore; tale equivalenza era già sospettata da Galileo, il quale la riscontrò, non riuscendo a misurare per via teorica l'area, per via fisica, pesando materialmente dei pezzi di metallo ritagliati secondo la sagoma della curva e della circonferenza generatrice[3]. Galileo dedusse, così, per via empirica che il rapporto doveva essere prossimo a $3 : 1$, ma rifiutò la sua prima intuizione forse ritenendo tale rapporto troppo semplice[4], e anzi si convinse persino dell'erroneità della sua prima impressione dopo un serie di errori accidentali in successivi studi e misurazioni.

L'esattezza della relazione tra le due aree fu invece dimostrata, dopo la sua morte, dall'allievo Torricelli e, quasi contemporaneamente da altri matematici, tra cui Roberval. È possibile offrire la facile dimostrazione data da Torricelli attraverso il metodo degli infinitesimi

Forma matematica

In rappresentazione parametrica la cicloide passante per l'origine generata da un cerchio di raggio r è data da:

$$\begin{cases} x = r\,(t - \sin t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases}.$$

La cicloide è una funzione continua ed è differenziabile ovunque tranne sulle cuspidi. Dove è differenziabile soddisfa l'equazione differenziale

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r - y}{y}.$$

È anche possibile scrivere l'equazione parametrica della **cicloide non ordinaria**, descritta da un punto rigidamente collegato al cerchio ma non necessariamente collocato sulla circonferenza. Se il raggio del cerchio è r e la distanza dal centro del punto considerato è d avremo:

$$\begin{cases} x = rt - d\sin t \\ y = r - d\cos t \end{cases}.$$

Infatti se $d = r$ si ottiene l'equazione della cicloide, che ne costituisce un caso particolare. La cicloide con $d > r$ (punto esterno al cerchio) è detta **allungata**, mentre quella con $d < r$ (punto interno) è detta **accorciata**.

L'equazione cartesiana di una cicloide è data da:

$$x = -\sqrt{y(2r - y)} + r\arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right)$$

Area

L'elemento infinitesimale di area è pari a:

$$dA = \frac{1}{2}\left|x(t)\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}y(t)\right| dt = \frac{r^2}{2}\left|(-2 + 2\cos t + t\sin t)\right| dt$$

da cui, l'area sotto un solo arco è:

$$A = \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|(-2 + 2\cos t + t\sin t)\right| dt = \frac{r^2}{2}\left|-2t - t\cos t + 3\sin t\right| = r^2 3\pi$$

Baricentro

Il baricentro della figura racchiusa tra il primo arco di cicloide e l'asse delle x, ha ascissa pari a $x_G = \pi r$. L'ordinata del baricentro può essere calcolata usando la formula:

$$y_G = \frac{\int y dx dy}{\int dx dy}$$

che possiamo riscrivere nella forma:

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^3(1-\cos t)^3 dt}{\int_0^{2\pi} r^2(1-\cos t)^2 dt}$$

L'integrale al denominatore restituisce l'area della figura calcolata al punto precedente. Effettuando i calcoli troviamo $y_G = \frac{5}{6}r$.

Il baricentro della figura sottesa dal primo arco della cicloide ha quindi baricentro in $(x_G; y_G) = \left(\pi r; \frac{5}{6}r\right)$.

Proprietà

La lunghezza della cicloide è pari a:

$$l(t) = 8r\sin^2\left(\frac{1}{4}t\right)$$

quindi la lunghezza del primo arco è

$$l(2\pi) = 8r$$

La curvatura è:

$$K(t) = -\frac{\left|\csc\left(\frac{t}{2}\right)\right|}{4r}$$

Trocoide

Quando la circonferenza mobile rotola su di una retta si parla sempre di cicloide (ordinaria, allungata o accorciata a seconda che il punto solidale alla circonferenza mobile disti dal centro di detta circonferenza una distanza pari, maggiore o minore del raggio). La cicloide ordinaria ha delle cuspidi, quella allungata ha delle asole, quella accorciata si presenta come una curva ondulata.

Le trocoidi (ipotrocoide, epitrocoide) rappresentano una generalizzazione delle epi- e delle ipocicloidi ottenute facendo rotolare una circonferenza mobile all'esterno o all'interno di una circonferenza fissa.

Note

1. ^ Questa proprietà fu dimostrata da Christopher Wren nel 1658, consecutivamente ad una sfida lanciata dal Pascal agli altri matematici dell'epoca.
2. ^ Questa semplice e forse banale proprietà fu la prima formalizzata da padre Mersenne.
3. ^ Erman Di Rienzo, *Premessa* in *La cicloide, la bella Elena della matematica (http://lnx.matematicamente.it/storia/Di_Rienzo-Cicloide.pdf)*
4. ^ Benché allora non fosse ancora nota la trascendenza del π, erano già largamente note le difficoltà circa la sua approssimazione e anche quelle riguardanti la quadratura del cerchio; non devono quindi stupire le perplessità del matematico pisano posto dinanzi a un numero così "tondo".

Bibliografia

- (**EN**) Martin Gardner, *The Cycloid: Helen of Geometry* in *Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*, 1971, pp. 127-134, ISBN 0-226-28250-3.

Voci correlate

- Cicloide sferica
- Epicicloide
- Ipocicloide
- Pendolo cicloidale
- Roulette
- Applicazione della cicloide

Altri progetti

- **Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it)** contiene immagini o altri file su **Cicloide (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cycloid?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (**EN**) Eric W. Weisstein, *Cycloid* in *MathWorld*, Wolfram Research.
- Cicloidi, epicicloidi, ipocicloidi, trocoidi (http://web.liceobellinzona.ch/materie/Matematica/parametriche/prova.html)