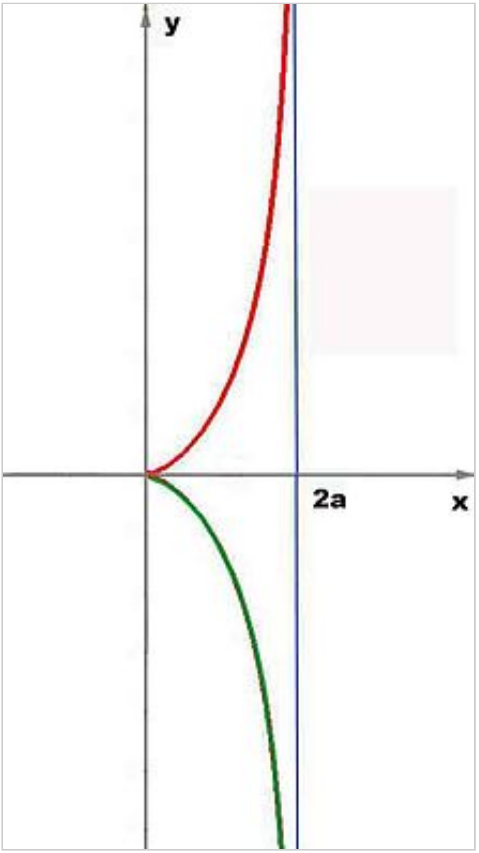
Cissoide di Diocle

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

La **cissoide di Diocle** è una curva piana dotata di una cuspide; in questo punto essa presenta una sola tangente, che viene chiamata anche asse della cissoide, in quanto la curva risulta simmetrica rispetto a tale retta. Dalla cuspide si dipartono due rami simmetrici, con lo stesso asintoto ortogonale all'asse.

Questa curva fu utilizzata da Diocle per risolvere il problema della duplicazione del cubo. La parola "cissoide" proviene dal greco *kissoeidēs*, "a forma di edera", composto di *kissos*, edera, e *oeidēs*, forma.



Cissoide di Diocle nel piano cartesiano

Indice

- 1 Equazioni
- 2 Costruzione della cissoide
  - 2.1 Equazione polare
- 3 Equazione cartesiana
- 4 Altre proprietà
- 5 Bibliografia
- 6 Altri progetti
- 7 Collegamenti esterni

Equazioni

La cissoide di Diocle può essere definita da diverse equazioni:

- equazione polare:

$$\rho = 2a(\sec\theta - \cos\theta), \quad \text{con} \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

- equazione parametrica:

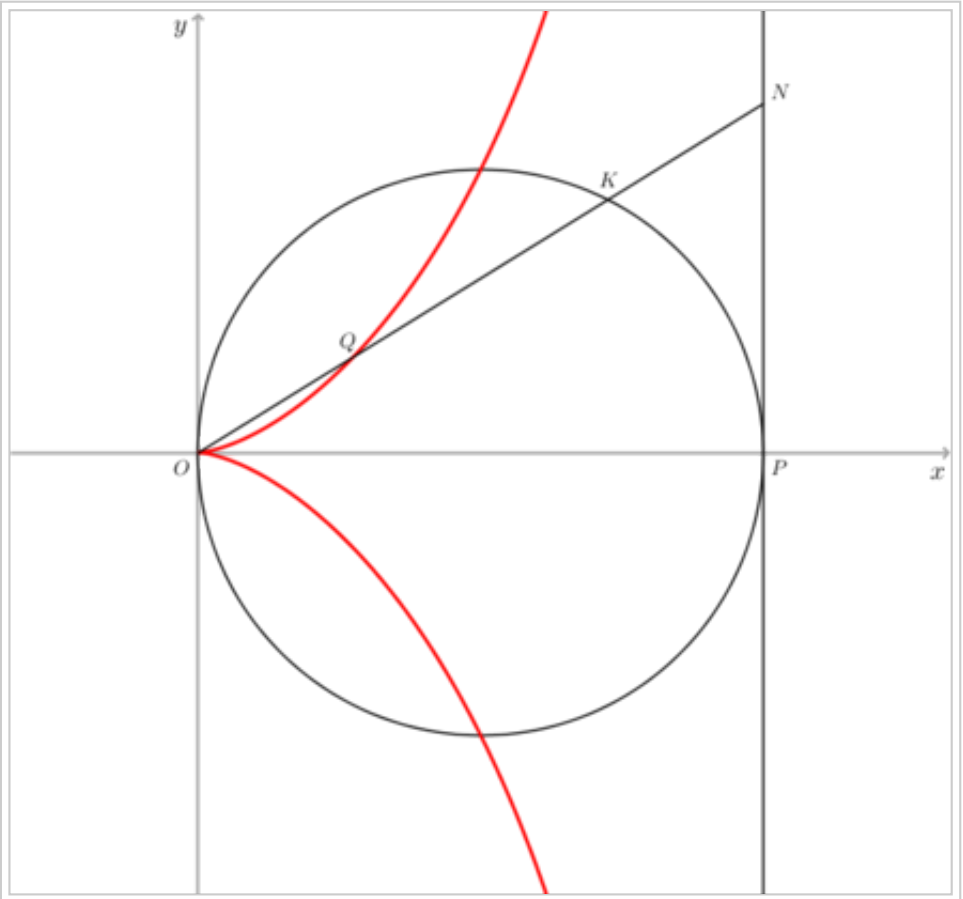
$$\begin{cases} y &= 2a\left(\tan\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ x &= 2a\sin^2\theta, \end{cases}$$

- equazione cartesiana:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad \text{dove} \quad x \in [0, 2a).$$

Costruzione della cissoide

La cissoide di Diocle è un caso particolare di cissoide, ottenuta utilizzando come curve base una circonferenza e una retta r ad essa tangente nel punto P, e come polo il punto O della circonferenza opposto a P. Ogni retta passante per O interseca r in un punto N e la circonferenza Γ in un punto K; la cissoide di Diocle è il luogo dei punti Q per cui vale l'uguaglianza $OQ = KN$.



Costruzione della cissoide di Diocle

Equazione polare

Da questa relazione è semplice ricavare l'equazione polare della cissoide: detto θ l'angolo $P\hat{O}N$, posto $OP = 2a$, dalle relazioni dei triangoli rettangoli OPK e OPN si ha:

$$\begin{aligned} ON &= 2a\sec\theta \\ OK &= 2a\cos\theta \\ QN &= ON - OQ = 2a\sec\theta - \rho, \end{aligned}$$

da cui segue $2a\cos\theta = 2a\sec\theta - \rho$ e l'equazione

$$\rho = 2a\sec\theta - 2a\cos\theta.$$

Equazione cartesiana

L'equazione cartesiana si ricava sostituendo nell'equazione polare:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta &= \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sec\theta &= \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \end{aligned}$$

Si ottiene allora:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2a\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 2a\frac{y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Eliminando i denominatori e isolando la y si ottiene l'equazione desiderata:

$$\begin{aligned} x\left(x^2+y^2\right) &= 2ay^2 \\ x^3+xy^2 &= 2ay^2 \\ x^3 &= (2a-x)\,y^2. \end{aligned}$$

Altre proprietà

Per la cissoide di Diocle valgono le seguenti proprietà, che possono anche essere assunte come definizione della curva:

- la podaria di una parabola rispetto al suo vertice è una cissoide di Diocle;
- se una parabola ruzzola (senza strisciare) su una parabola uguale toccandola sempre esternamente, il suo vertice descrive una cissoide di Diocle;
- la famiglia delle cissoidi è l'intersezione della famiglia delle concoidi di de Sluze con la famiglia delle ofiuridi.

Bibliografia

- (**EN**) Xah Lee, *Cissoid of Diocles* su *Visual Dictionary of Special Plane Curves*. URL consultato il 10 agosto 2008.
- (**EN**) *Cissoid of Diocles* su *The MacTutor History of Mathematics archive*, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. URL consultato il 10 agosto 2008.
- (**FR**) Robert Ferréol, Jacques Mandonnet, *Cissoïde de Dioclès ou cissoïde droite* su *Encyclopédie des formes Mathématiques Remarquables*. URL consultato il 10 agosto 2008. (con illustrazioni molto buone)

Altri progetti

- **Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/?uselang=it)** contiene immagini o altri file su **Cissoide di Diocle (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Cissoid?uselang=it)**

Collegamenti esterni

Costruzione della cissoide di Diocle (http://www.webalice.it/francesco.daddi/files/cissoide_diocle.html)

Estratto da "https://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Cissoide_di_Diocle&oldid=68471056"

Categoria: Curve piane

- Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 3 ott 2014 alle 23:12.
- Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le Condizioni d'uso per i dettagli. Wikipedia® è un marchio registrato della Wikimedia Foundation, Inc.