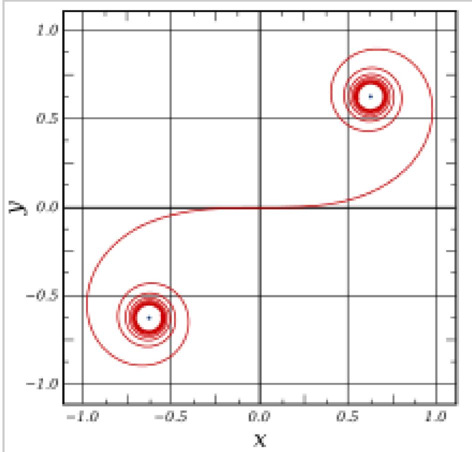
Clotoide

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.



La spirale di Cornu (clotoide), ottenuta disegnando gli integrali di Fresnel (*x*, *y*) = (*C*(*t*), *S*(*t*)).

La **clotoide** o **spirale di Cornu** o **spirale di Eulero** è una curva la cui curvatura varia linearmente lungo la sua lunghezza, studiata per la prima volta probabilmente da Johann Bernoulli intorno al 1696.[1] Il nome deriva da una delle mitiche Parche greche, Cloto (le altre due sono Lachesi e Atropo), che avvolgeva il filo dell'esistenza di ogni persona attorno a due fusi: la curva ricorda infatti un filo avvolto tra due fusi rappresentati dai centri delle due spirali.[2]

Indice

Formulazione

L'equazione di Cesàro della clotoide generalizzata è espressa tipicamente nella forma[3]

$$k = -\frac{s^n}{a^{n+1}}$$

dove k è la curvatura, s l'ascissa curvilinea, n e a sono una coppia di parametri. Per $n = 1$ si ha la clotoide usuale, detta monoparametrica, per $n > 1$ si parla di iperclotoide, mentre per $n < 1$ di ipoclotoide.

Parametrizzazione

La curvatura k_α di una curva α con velocità unitaria è pari alla derivata dell'angolo di rotazione

$$k_\alpha(s) = \frac{\mathrm{d}\theta_\alpha(s)}{\mathrm{d}s}$$

dove l'angolo di rotazione determinato da θ_0 è l'unica funzione differenziabile $\theta_\alpha : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\alpha\prime(t)}{||\alpha\prime(t)||} = (\cos(\theta_\alpha(t)), \sin(\theta_\alpha(t)))$$

e

$$\theta_\alpha(t_0) = \theta_0$$

per una curva regolare $\alpha(t) : [a,\, b] \to \mathbb{R}^2$, con $\theta_0 \in [0,\, 2\pi]$ tale che

$$\frac{\alpha\prime(t_0)}{||\alpha\prime(t_0)||} = (\cos(\theta_0),\, \sin(\theta_0))$$

per un valore $t_0 \in [a,\, b]$ fissato.[4]

Partendo dall'equazione naturale della clotoide

$$k = -\frac{s^n}{a^{n+1}}$$

integrando si ha[5]

$$\theta(s) = -\frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}$$

da cui, per la definizione di angolo di rotazione

$$\alpha\prime(s) = \left(\cos\left(-\frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}\right),\, \sin\left(-\frac{s^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}\right)\right).$$

Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale e un cambio di variabile per portare all'esterno il parametro *a*, si trova una parametrizzazione della clotoide generalizzata (al netto di possibili rototraslazioni):[5]

$$(x(t),\, y(t)) = a^{n+1}\left(\int_0^t \cos\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) \mathrm{d}u,\, \int_0^t \sin\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) \mathrm{d}u\right).$$

Per $n = 1$ si ha la clotoide usuale, la cui parametrizzazione è espressa rispetto agli integrali di Fresnel:

$$(x(t),\, y(t)) = a\left(\int_0^t \cos\left(u^2\right) \mathrm{d}u,\, \int_0^t \sin\left(u^2\right) \mathrm{d}u\right).$$

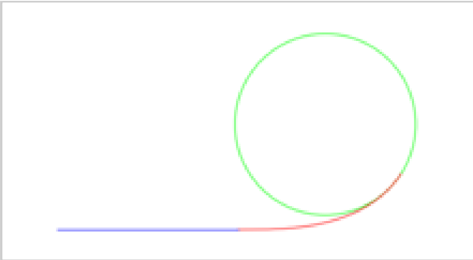
Applicazione nell'ingegneria dei trasporti

Un arco di clotoide è usato come un raccordo progressivo, inserito come elemento di transizione:

- tra un rettifilo ed il successivo arco di cerchio;
- tra 2 archi di cerchio l'uno interno all'altro, ma appartenenti a circonferenze non concentriche (clotoide di continuità);
- tra 2 archi di cerchio l'uno esterno all'altro (clotoide di flesso).

Nell'ingegneria ferroviaria, la clotoide è utilizzata nel progetto di curve a raggio variabile, utili per evitare il brusco passaggio da una curvatura nulla (rettifilo con raggio infinito) ad una curvatura data (arco di cerchio con raggio assegnato) e quindi l'insorgere di un contraccolpo che determina una variazione istantanea dell'accelerazione centripeta, dannosa per i cerchioni a contatto con le rotaie e per il comfort dei passeggeri nei vagoni.

Nell'ingegneria stradale il problema non è dovuto al contraccolpo, ma a una dispersione delle traiettorie dei veicoli che affrontano la curva. La variazione istantanea di curvatura, infatti, in caso di curva senza raggio di raccordo, dovrebbe essere affrontata con una sterzata istantanea (e ciò è ovviamente impossibile, poiché per ogni movimento è indispensabile un certo tempo e inoltre il conducente non può rendersi conto del tipo di geometria stradale che sta per affrontare); gli ingegneri stradali quindi optano per traiettorie che non determinino problemi di sicurezza stradale.



Esempio di transizione a raggio variabile (in rosso) da un tratto rettilineo (in blu) a un tratto a curvatura costante (in verde).

Note

1. ^ Bernoulli, pp. 1084-1086.
2. ^ (FR) Robert Ferréol e Jacques Mandonnet, *Spirale de Cornu* su *mathcurve.com*. (archiviato il 17 agosto 2015).
3. ^ Caddeo & Gray, p. 145.
4. ^ Caddeo & Gray, pp. 20-21.
5. ^ *a* *b* Per semplicità si pongono a zero le costanti di integrazione, che in generale permettono di ruotare (nel caso di θ) o traslare (le due costanti integrando αl) la curva. L'equazione di Cesàro dalla quale parte il calcolo è infatti indipendente dalla posizione, essendo invariante per rototraslazioni della curva nel piano.

Bibliografia

- Johann Bernoulli, *Opera, Tomus Secundus*, Brussels, Culture er Civilisation, 1967.
- Renzo Caddeo e Alfred Gray, *Curve e superfici*, vol. 1, Cagliari, CUEC, 2001, ISBN 88-8467-022-5.

Collegamenti esterni

- (EN) Eric W. Weisstein, *Clotoide* in *MathWorld*, Wolfram Research.
- (FR) Robert Ferréol, *Clotoide* in *Encyclopédie des Formes Mathématiques Remarquables*.